

(60 درجة)

أولاً: أجب عن السؤال الآتي:

وظف تعريف المشتق في إثبات أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

الحل:لتكن الدالة f المعرفة على R وفق: $f(x) = e^x$ نعلم أن الدالة f اشتقاقية على R ومشتقتها: $f'(x) = e^x$ فيكون: $f(0) = e^0 = 1$ & $f'(0) = e^0 = 1$

وبحسب تعريف العدد المشتق:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(50 درجة للأول ، 40 للثاني ، 60 للثالث)

ثانياً: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول:أكتب معادلة المستوي المار بمبدأ الإحداثيات ويوازي كلاً من: $\vec{u}(-2, 2, -1)$ ، $\vec{v}(-1, 0, -1)$ **الحل:**

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{إذاً: } -2(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \text{ ومنه: } -2x - y + 2z = 0$$

$$\text{طريقة ثانية: بفك المحدد: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ نحصل على المعادلة المطلوبة.}$$

التمرين الثاني: أثبت أن: $\ln(x) \leq x - 1$ ، أيًا كانت $x \in]0, +\infty[$

الحل:

$$\ln(x) \leq x - 1 \Rightarrow \ln(x) - x + 1 \leq 0$$

نفرض الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \ln(x) - x + 1$

ولندرس الأطراد: الدالة f اشتقاقية على $]0, +\infty[$ ومشتقتها: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

وعندما: $f'(x) = 0$ يكون: $x = 1$ ويكون: $f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$

ويكون جدول الأطراد:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

نلاحظ من جدول التغيرات أن: $f(x) \leq 0$ نعوض: $\ln(x) - x + 1 \leq 0$

ومنه نجد: $\ln(x) \leq x - 1$ وذلك أيًا كانت $x \in]0, +\infty[$.

التمرين الثالث: إذا كانت $M(x, y)$ صورة العدد المركب $z = x + iy$ أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة

النقط $M(z)$ والتي تحقق: $|iz - 1| = |z + 2|$

الحل:

نعوض $z = x + iy$: $|i(x + iy) - 1| = |x + iy + 2|$

$$|xi - (y + 1)| = |iy + (x + 2)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y + 1)^2 + x^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

بتربيع الطرفين وفك المتطابقات نجد: $y^2 + 2y + 1 + x^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

بالإصلاح نجد: $4x - 2y + 3 = 0$ وهي معادلة مستقيم ميله يساوي (2)

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (50 درجة للأول ، 90 للثاني ، 50 للثالث ، 90 للرابع)

السؤال الأول: لتكن الدالة f المعرفة على R وفق: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$ خطه البياني C

أحسب القيمة التقريبية لميل المماس للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $(1, 2)$

الحل:

نعلم أن الميل يساوي القيمة العددية للمشتق عند تلك النقطة: $m(x) = f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

الدالة m معرفة على $R \setminus \{0\}$ وفق: $m(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

وقابلة للاشتقاق على: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$: $m'(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

ولدينا: $\begin{cases} m(a) = m(1) = \frac{2}{3} \\ m'(a) = m'(1) = -\frac{2}{9} \end{cases}$ و: $h = \frac{2}{10}$

دستور التقريب: $m(x, y) \approx m(a) + m'(a).h$

نعوض: $m(1,2) \approx \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{9}\right) \times \frac{2}{10} \approx \frac{28}{45}$

السؤال الثاني:

صندوقان متماثلان أحدهما (I) يحوي n كرة حمراء وكرتين بيضاويتين ، والآخر (II) يحوي كرتين بيضاويتين و كرة حمراء ، اختير أحد الصندوقين عشوائياً ، وسحبت منه كرة واحدة فقط ، وليكن A

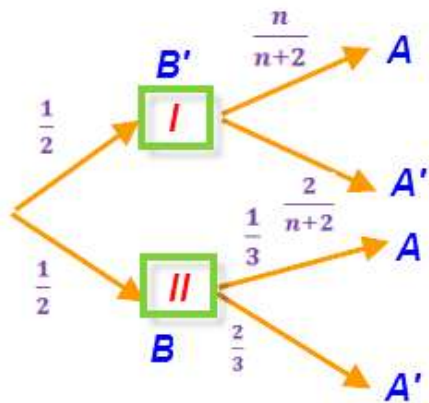
حدث الحصول على كرة حمراء ، و B حدث اختيار الصندوق (II)

1- أحسب n إذا علمت أن $P_A(B) = \frac{2}{5}$

2- من أجل $n = 2$ نعرف X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة (2) عند سحب كرة حمراء ، ويأخذ القيمة

(3) عند سحب كرة بيضاء ، أكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم أحسب توقعه الرياضي.

الحل:



1- باستخدام المخطط الشجري:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+2} \end{cases}$$

ولدينا: $P_A(B) = \frac{2}{5}$ حيث: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نعوض: $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+2}} = \frac{2}{5}$

بالإصلاح نجد: $n = 2$

2- قيم المتغير العشوائي: $X(\Omega) = \{2, 3\}$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \\ f(3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

r_k	2	3	\sum
$f(r_k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	1
$r_k \cdot f(r_k)$	$\frac{10}{12}$	$\frac{21}{12}$	$\frac{31}{12}$

$$E(X) = \sum r_k \cdot f(r_k) = \frac{31}{12}$$

السؤال الثالث: ليكن لدينا الدالتين f_1, f_2 المعرفتان على R وفق: $f_2 = e^{-\frac{x}{2}}, f_1 = e^{\frac{x}{2}}$

خطهما البياني C_1, C_2 على الترتيب ، والمطلوب:

أحسب V حجم الجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بالخطين البيانيين لهاتين الدالتين والمستقيم الذي

معادلته $x = 1$ والواقع في الربع الأول دورة كاملة حول $x'x$

الحل:

لايجاد نقط التقاطع نحل جملة المعادلتين: $e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}$ ومنه: $\frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$ أي: $x = 0$

وفي المجال $[0,1]$ يكون: $f_1(x) > f_2(x)$ فيكون:

$$V = \pi \int_a^b [f_1(x)^2 - f_2(x)^2] dx = \pi \int_0^1 [e^x - e^{-x}] dx = \pi [e^x + e^{-x}]_0^1$$

$$= \pi((e + e^{-1}) - (1 + 1)) = \pi\left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$$

السؤال الرابع: قطع مكافئ ذروته $v(-2, -1)$ ويمر من مبدأ الاحداثيات وبالنقطة $M(-4, 0)$

1- أكتب معادلة هذا القطع وعين محرقه F ، ثم اكتب معادلة المماس d لهذا القطع في النقطة

$M(-4, 0)$ ثم أرسمه وأرسم هذا القطع

2- بفرض أن المماس d يقطع محور تناظر القطع في النقطة $N(-2, -2)$ أثبت أن المثلث MFN

قائم في F ومتساوي الساقين.

الحل:

1- من الرسم التقريبي للنقاط المعطاة نلاحظ أن محور القطع يوازي $y'y'$

والمعادلة من الشكل: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

نعوض احداثيي الذروة و احداثيي نقطة المبدأ لأنه يمر منها: $(0 + 2)^2 = 4p(0 + 1)$ ومنه: $p = 1$

فتصبح المعادلة: $(x + 2)^2 = 4(y + 1)$

محرق القطع: $F(x_0, y_0 + p) = F(-2, 0)$

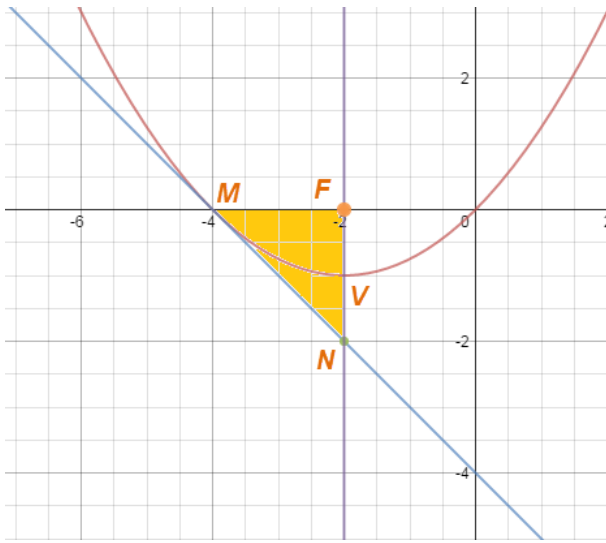
و لايجاد معادلة المماس نشتق المعادلة بالنسبة لـ x :

$$2(x + 2)(1) = 4y' \Rightarrow m = y' = \frac{2x + 4}{4} = \frac{2(-4) + 4}{4} = -1$$

معادلة المماس من الشكل: $y - y_M = m(x - x_M)$ نعوض: $y - 0 = -(x + 4)$

بالإصلاح نجد: $y = -x - 4$

2- الرسم:



ولنحسب أطوال أضلاع المثلث MFN $\begin{cases} M(-4,0) \\ N(-2,-2) \\ F(-2,0) \end{cases}$

$$\begin{cases} MF = |x_F - x_M| = |0 - (-2)| = 2 \\ FN = |y_N - y_F| = |-2 - 0| = 2 \\ MN = \sqrt{(-2 + 4)^2 + (-2 - 0)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

فيكون: $MF = FN$

وبما أن: $MN^2 = FN^2 + MF^2$

لأن: $(2\sqrt{2})^2 = (2)^2 + (2)^2$ محققة ، فحسب عكس مبرهنة فيثاغورث يكون المثلث قائم في F

ومنه يكون المثلث MFN قائم في F ومتساوي الساقين.

طريقة ثانية هندسية:

MF قطعة مستقيمة من محور الفواصل & NF قطعة مستقيمة من محور التناظر ℓ

ولأن محور التناظر يعامد محور الفواصل فيكون $MF \perp NF$ و المثلث MFN قائم في F

وبحسب الخواص الهندسية للمماس يكون: $NF = MF$ فالمثلث MFN قائم في F ومتساوي الساقين

طريقة ثالثة:

لأن: $\begin{cases} m_{MF} = 0 \\ m_{FN} = \text{غير معرف} \end{cases}$ فالمستقيمان متعامدان ، وبحسب الخواص الهندسية للمماس

يكون: المثلث MFN قائم في F ومتساوي الساقين.

(110 درجات)

رابعاً: حل المسألة الآتية:

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ والمطلوب:

1 - أدرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحور $x'x$

او للمحور $y'y$ ، ثم أدرس وضع C بالنسبة لتلك مقارب وجدته ، وعين القيمة الكبرى محلياً في حال وجودها

2 - أرسم كل مقارب وجدته ثم أرسم C ، و استنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة: $f_1 = \frac{-x}{(x-1)^2}$

3 - أحسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور $x'x$ والمستقيم $x = 1$.

الحل:

1 - الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على: $]-\infty, -1[,]-1, +\infty[$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right) = 0 , & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right) = -\infty , & \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right) = -\infty \end{cases}$$

المستقيم $y = 0$: مقارب للخط البياني C منطبق على المحور $x'x$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم $x = 1$ مقارب للخط البياني C يوازي المحور $y'y$

$$f'(x) = \frac{1(x+1)^2 + 2(x+1)(1)(x)}{(x+1)^4} = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4}$$

x	0	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	0 -
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	$-\infty \nearrow \frac{1}{4}$	$\nearrow 0$

الوضع النسبي: $f(x) - y_\Delta = \frac{x}{(x+1)^2}$

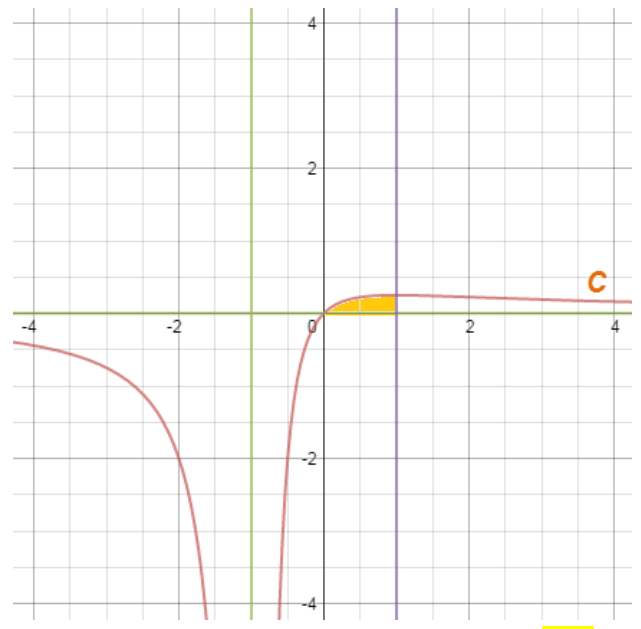
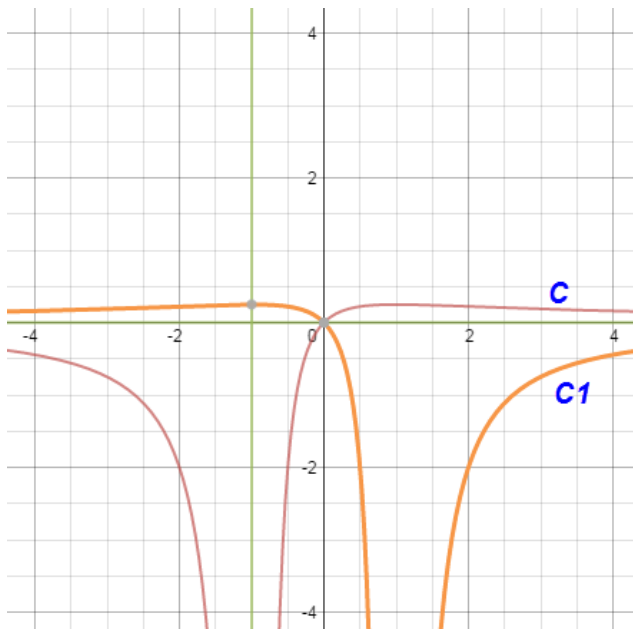
بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ من إشارة البسط: $x = 0$

x	0	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	-	-	0	+
الوضع النسبي	C تحت المقارب	C تحت المقارب	C فوق المقارب	

القيمة الكبرى المحلية هي: $f(1) = \frac{1}{4}$

-2 نلاحظ أن: $f_1(x) = \frac{-x}{(x-1)^2} = \frac{-x}{(-x+1)^2} = f(-x)$

أي أن C_1 هو نظير C بالنسبة إلى محور الترتيب $y'y$



-3 من الرسم نجد:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} \cdot dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) \cdot dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

ملاحظة: يوجد طرق أخرى لإيجاد التكامل (مثل تفريق الكسور)

شكر خاص للأستاذ القدير محمد خالد غزول على التدقيق