



En effet, selon l'expression (7)  $\overline{AH} / \overline{A'H}$  n'est pas constant. Il dépend de l'angle d'incidence  $i$ , ainsi la position de l'image ( $A'$ ) d'un objet ponctuel ( $A$ ) dépend de l'angle d'incidence (rayon considéré).

3. En considérant  $i$  et  $i'$  petits on peut écrire :  $\cos(i) \approx 1$  et  $\cos(i') \approx 1$

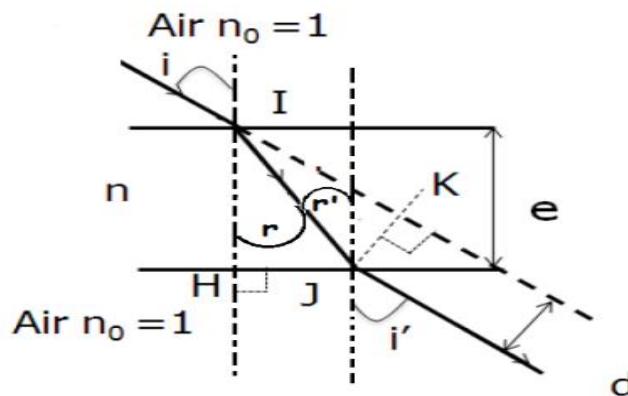
d'où :

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H}} = \frac{n'}{n} \quad (8)$$

4. L'expression  $\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H}} = \frac{n'}{n}$  c'est une constante, dans ce cas la position de l'image ( $A'$ ) ne dépend pas de ( $i$ ) donc tous les rayons issus de  $A$  ayant une faible incidence émergeront en semblant provenir du point ( $A'$ ). Il y a donc un stigmatisme approché dans les conditions de Gauss (approximation des petits angles).

### Exercice 2:

1. Pour la construction voir le schéma suivant :



2. Ecrivons la loi de la réfraction au niveau du point d'incidence I :

$$\sin(i) = n \cdot \sin(r) \quad (1)$$

Du même en J :

$$\sin(i') = n \cdot \sin(r') \quad (2)$$

Or, on a  $r = r'$ . Il en résulte :

$$i = i' \quad (3)$$

Finalement on en déduit que le rayon incident et émergent sont bien parallèles.

3. Le déplacement  $d$  :

On considère le triangle IHJ on a :

$$\overline{IJ} = \frac{e}{\cos(r)} \quad (4)$$

Dans le triangle IJK on a :

$$\overline{IJ} = \frac{d}{\sin(i-r)} \quad (5)$$

De (4) et (5) on peut écrire :

$$d = e \frac{\sin(i-r)}{\cos(r)} \quad (6)$$

4. L'expression du déplacement :

$$\sin(i-r) = \sin(i)\cos(r) - \cos(i)\sin(r) \quad (7)$$

En tenant compte de l'expression (1) on a :

$$\sin^2(i) = n^2 \cdot \sin^2(r) \quad (8)$$

$$\sin^2(i) / n^2 = 1 - \cos^2(r) \quad (9)$$

Soit :

$$\cos(r) = \sqrt{1 - \sin^2(i) / n^2} \quad (10)$$

En tenant compte de (10), (1) L'expression (7) devient :

$$\sin(i-r) = \sin(i)\sqrt{1 - \sin^2(i) / n^2} - \sqrt{1 - \sin^2(i)} \frac{\sin(i)}{n} \quad (11)$$

Par la suite, l'expression (6) peut réécrite :

$$d = e \frac{\sin(i) \left( \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2(i)}{n^2}} - \sqrt{\frac{1 - \sin^2(i)}{n^2}} \right)}{\sqrt{\left( \frac{n^2 - \sin^2(i)}{n^2} \right)}} \quad (12)$$

$$d = e \frac{\sin(i) \left( \sqrt{n^2 - \sin^2(i)} - \sqrt{1 - \sin^2(i)} \right)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}} \quad (13)$$

Après simplification on trouve :

$$d = e \cdot \sin(i) \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2(i)}}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}} \right) \quad (14)$$

5. Pour un angle d'incidence petit on a  $\sin(i) \approx i$  et  $\sin^2(i) \approx 0$  il en déduit que :

$$d = e i \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad (15)$$

6. A.N :  $d \approx 0.29 \text{ cm}$

**Exercice 3:**

1. On utilisant la 2<sup>ème</sup> loi de Descartes pour la réflexion en I et en I' on a :

$$\sin(i) = n \cdot \sin(r) \quad (1)$$

$$n \cdot \sin(r') = \sin(i') \quad (2)$$

2. On considère le triangle IAI' nous avons :

$$\hat{A} + \hat{AII}' + \hat{AI'I} = \pi \quad (3)$$

Sachant que:  $\hat{AII}' = (\pi/2) - r$  et  $\hat{AI'I} = (\pi/2) - r'$ . En reportant ces deux relations dans l'expression (3) on aura bien :

$$\hat{A} + (\pi/2) - r + (\pi/2) - r' = \pi/2 \quad (4)$$

Il en résulte

$$\hat{A} = r + r' \quad (5)$$

3. La déviation  $D_1$  que subit le rayon incident en I est illustrée sur le schéma. Soient :

$$D_1 + r = i \quad (6)$$

D'où

$$D_1 = i - r \quad (7)$$

4. De la même façon nous avons :

$$i' - D_2 = r' \quad (8)$$

$$D_2 = i' - r' \quad (9)$$

5. La déviation totale D introduite par le prisme.

D'après le schéma :

$$D = D_1 + D_2 \quad (10)$$

En tenant compte de (7) et (9) nous avons :

$$D = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r') = i + i' - A \quad (11)$$

En tenant compte de (5) il vient:

$$D = i + i' - A \quad (12)$$

6. Dérivées des expressions (1) et (2) de la question 1:

$$\cos(i) = n \frac{dr}{di} \cos(r)$$

Soit

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos(i)}{n \cdot \cos(r)} \quad (13)$$

$$n \cdot \frac{dr'}{di} \cos(r') = \frac{di'}{di} \cos(i') \quad (14)$$

L'expression (14) peut être réécrite comme suivant:

$$\frac{di'}{di} = n \cdot \frac{dr'}{di} \frac{\cos(r')}{\cos(i')} \quad (15)$$

Dérivée de l'expression (5) de la question 2 on a:

$$\frac{dA}{di} = \frac{dr}{di} + \frac{dr'}{di} \quad (16)$$

Or, A est constante, d'où,  $0 = \frac{dr}{di} + \frac{dr'}{di}$ .

Il en résulte,

$$\frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di} \quad (17)$$

On dérive l'expression (12) de la question 5 on a bien:

$$\frac{dD}{di} = \frac{di}{di} + \frac{di'}{di} - \frac{dA}{di} = 1 + \frac{di'}{di} - 0 \quad (18)$$

D'où

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} \quad (19)$$

Portons l'expression (15) dans (19) il vient:

$$\frac{dD}{di} = 1 + n \cdot \frac{dr'}{di} \frac{\cos(r')}{\cos(i')} \quad (20)$$

En tenant compte de (17) et (13) on a :

$$\frac{dD}{di} = 1 - n \frac{dr}{di} \frac{\cos(r')}{\cos(i')} \quad (21)$$

En tenant compte de (13) on a :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos(i)}{\cos(r)} \frac{\cos(r')}{\cos(i')} \quad (22)$$

Le fait que D est minimale implique  $\frac{dD}{di} = 0$ , l'expression (22) devient :

$$\cos(r) \cos(i') = \cos(i) \cos(r') \quad (23)$$

Autrement dit,

$$\cos^2(r) \cos^2(i') = \cos^2(i) \cos^2(r') \quad (24)$$

$$(1 - \sin^2(r))(1 - \sin^2(i')) = (1 - \sin^2(i))(1 - \sin^2(r')) \quad (25)$$

On tient compte de (1) et (2) :

$$\left(1 - \frac{\sin^2(i)}{n^2}\right)(1 - \sin^2(i')) = (1 - \sin^2(i))\left(1 - \frac{\sin^2(i')}{n^2}\right) \quad (26)$$

On développe le calcul on a bien:

$$1 - \sin^2(i') - \frac{\sin^2(i)}{n^2} + \frac{\sin^2(i)\sin^2(i')}{n^2} = 1 - \sin^2(i) - \frac{\sin^2(i')}{n^2} + \frac{\sin^2(i)\sin^2(i')}{n^2} \quad (27)$$

$$\sin^2(i') - \frac{\sin^2(i')}{n^2} = \sin^2(i) - \frac{\sin^2(i)}{n^2} \quad (28)$$

$$\sin^2(i')\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sin^2(i)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (29)$$

Finalement, après simplification on peut conclure que,  $\sin^2(i') = \sin^2(i)$  ce qui implique  $i = \mp i'$  or, le cas où  $i = -i'$  est équivalent à  $r = -r'$  c'est-à-dire  $A = r + r' = 0$  ce qui n'est pas acceptable. Il en résulte que de la déviation  $D$  passe par un minimum  $D_m$  pour  $i = i'$  soit  $D_m = 2i - A$ .

#### Exercice 4 :

Principe de Fermat : « Le trajet parcouru par la lumière entre deux points est toujours celui qui minimise le temps de parcours ».

Les points A et B ont les coordonnées A (0,  $y_A$ ) et B ( $x_B, y_B$ ). La trajectoire du maître-nageur va être constituée de deux portions rectilignes AI et IB, où I(x,0) désigne le point où le maître-nageur se met à nager. On peut remarquer que la distance AI sera plus grande que la distance IB puisque le maître-nageur va certainement plus vite en courant qu'en nageant.

1. Le temps T mis pour que le maître-nageur allé de A à B soit alors :

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} \quad (1)$$

En développant les valeurs de AI et IB, on obtient  $t = T(x)$  en fonction de l'abscisse x de I :

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{v_2} \quad (2)$$

2. Condition sur x pour que la durée soit extrémale, précisément, minimale.

L'extremum de T(x) est atteint lorsque sa dérivée par rapport à x est nulle et qu'il change de signe en point extremum, on sait déjà qu'il s'agit d'un minimum.

Calculons la dérivée de l'expression (1):

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \quad (3)$$

En remarquant que :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{x}{AI} = \sin(i_1) \text{ et } \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = \frac{(x_B - x)}{IB} = \sin(i_2) \quad (4)$$

$dT / dx = 0$  implique que :

$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2) \quad (5)$$

**3.** Par analogie avec l'optique, les angles  $i_1$  et  $i_2$ , par peuvent être appelés angle d'incidence et angle de réfraction, le maître-nageur est assimilé à la lumière ainsi, la condition d'un temps extremum mis par la lumière (soit  $dT / dx = 0$ ) il s'exprime alors sous la forme:

$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2) \quad (6)$$

Or,  $n_1 = \frac{c}{v_1}$  et  $n_2 = \frac{c}{v_2}$

Il en résulte :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \quad (7)$$