

I « oscillations libres non amorties » -> Solution :

1) Pendule élastique Vertical

(m, k, n) :

$$\ddot{m} + \omega_0^2 m = 0$$

Solution :

$$m(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (pulsation propre)} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases}$$

2) Pendule pesant Simple

(m, l, \theta) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

-> Solution :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ (pulsation propre)} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{cases}$$

-> l'équation de Lagrange pour un mouvement unidimensionnel : X

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial m} \right) = 0$$

-> l'équation de Lagrange pour un mouvement rotationnel : \theta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

-> l'énergie mécanique se conserve :

$$T + U = \text{const}$$

-> masse équivalente : (cas où la masse m du ressort n'est pas négligeable)

$$\text{donc : } m_{eq} = \frac{m}{3}$$

-> des ressorts équivalents :

1/ en parallèles :

$$K_{eq} = K_1 + K_2 + \dots + K_n$$

2/ en série :

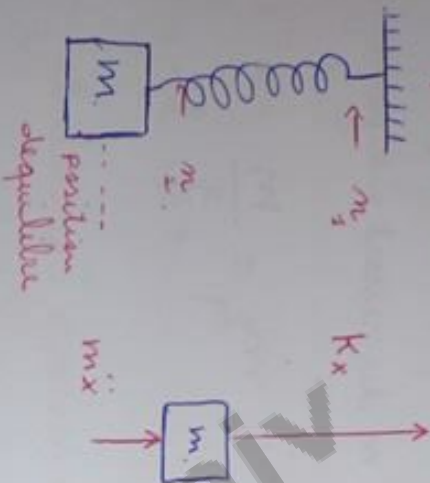
$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}$$

-> Barre liée 2 ressorts : (distance non négligeable)

$$K_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{K_1} + \frac{b^2}{K_2}}$$

→ Exemple : -1-

* Pentele elastique
* Vertical



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

← معادلة لاغرانج →

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$$

→ l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

→ l'énergie potentielle du système :

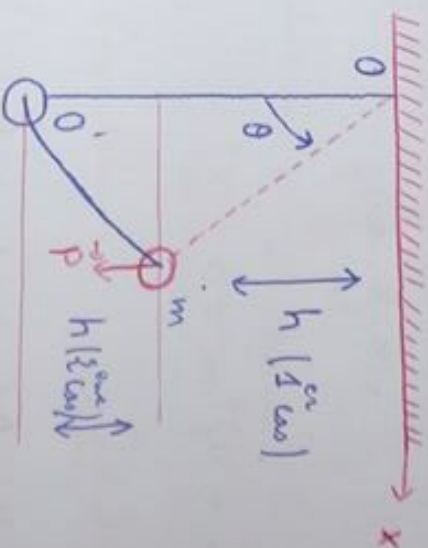
$$U = \frac{1}{2} K (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

→ la fonction de Lagrange :

$$L = T - U \\ = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

Exemple : 2-

* Pendule pesant
* Simple



$$x = L \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = L \dot{\theta} \cos \theta \\ y = L \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -L \dot{\theta} \sin \theta$$

→ l'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{y})^2$$

$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

→ l'énergie potentielle du système

$$U = mgh$$

→ 1^{er} cas

$$h = -l \cdot \cos \theta$$

donc

$$U = -mgl \cos \theta$$

→ 2^{ème} cas

$$h = l \cdot l \cdot \cos \theta$$

donc :

$$U = mgl(1 - \cos \theta)$$

→ fonction du lagrange :

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

• l'équation de lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = -m \cdot g \cdot l \sin \theta$$

donc :

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Exemple : -3-

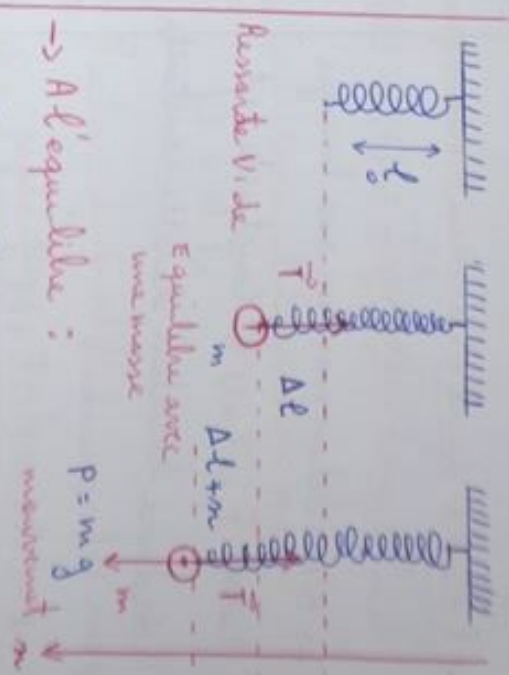
• pendule élastique
• Vertical

→ A l'équilibre : il y a deux forces qui

agissent sur la masse m : son poids

et la force de rappel du ressort de

ressort



→ A l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$mg - K \Delta l = 0$$

→ l'équation de mouvement avec la

de Newton :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$mg = K \Delta l$$

$$mg - K(m + \Delta l) = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} = -Kx$$

donc

$$m \ddot{x} + Kx = 0$$

$$m \ddot{x} + m \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

→ l'étude d'une vibration harmonique en termes d'énergie :

→ Nous allons montrer que l'énergie totale $E = T + U$ est constante et déduire la valeur de cette constante pour le cas premier

$x = A \cos(\omega t + \varphi)$ alors :

$$E = T + U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1) \quad (K = m \omega^2)$$

donc :

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} K A^2 = \text{constante}$$

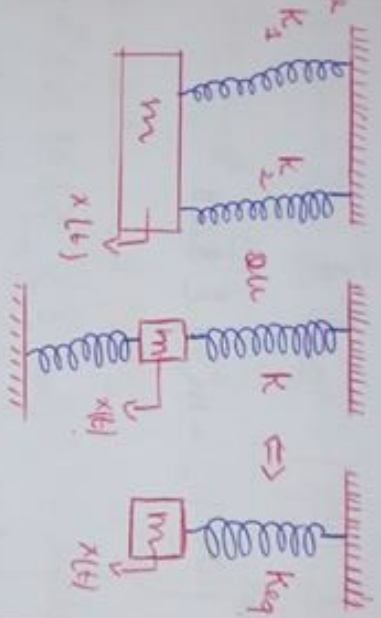
→ Exemple : -4-

* Ressort équivalent

1/ en parallèle :

$$m \cdot g = (K_1 + K_2) x \Rightarrow K_{eq} x \Rightarrow$$

$$K_{eq} = K_1 + K_2$$



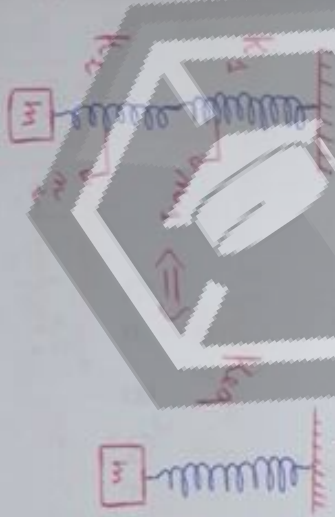
2/ en série :

soit n_1 : allongation du ressort $Mg = K_1 x_1$

soit n_2 : " " " " $Mg = K_2 x_2$

soit n_3 : " " " " $Mg = K_3 x_3$

$$n_1 + n_2 + n_3 = Mg \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right) \Rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}$$

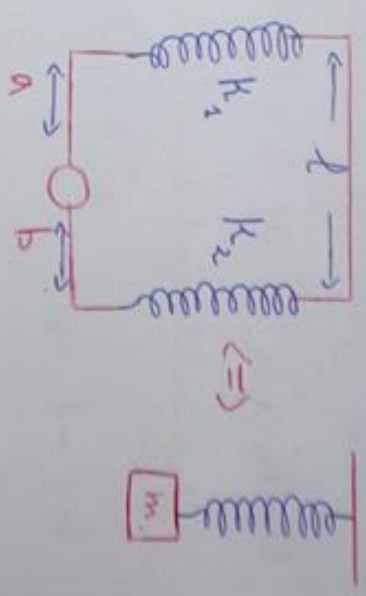


3/ Barre liée à 2 ressorts :

$$K_{eq} = \frac{(a+b)^2}{a^2} \text{ si } a=b$$

$$\frac{a^2}{K_2} + \frac{b^2}{K_1}$$

$$K_{eq} = K_1 + K_2$$



Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $m(t)$	Charge électrique : $q(t)$
Vitesse : $\dot{x}(t)$	Courant électrique : $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : \ddot{x}	Variation du courant : \ddot{q}
masse : m	inductance bobine, self : L
ressort : K	inverse capacité : $\frac{1}{C}$
Force de rappel Kx	des bornes d'un condensateur : q/C
Force d'inertie : $m \ddot{x}$	d.d.p. des bornes de la bobine : $L \ddot{q}$
Energie potentielle : $U = \frac{1}{2} K x^2$	Energie électrique : $U = \frac{1}{2} L i^2$

Energie cinétique :	Energie magnétique :
$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$= \frac{1}{2} L \dot{q}^2$

II Oscillation libres amorties :

1-> l'équation de Lagrange par un mouvement unidimensionnel :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

2-> l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{S}{m_0} \end{cases}$$

-> $x(t) = A e^{rt}$ est une solution particulière
tel que : r_1, r_2

$$\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

* amortissement faible :

$$\delta < \omega_0 \quad (0 < \xi < 1) \Rightarrow$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 < 0$$

-> solution : $m(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

avec : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$: pulsation des oscillations amorties

-> Amortissement critique : $\delta = \omega_0$ ($\xi = 1$)
- la solution : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$: pseudo-période

-> Amortissement trop fort :

$$\delta > \omega_0 \quad (\xi > 1)$$

- la solution :

$$m(t) = (C_1 + C_2) e^{-\delta t}$$

$$\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$$

-> Amortissement fort :

$$\delta > \omega_0 \quad (\xi > 1)$$

-> la solution

$$x(t) = e^{-\delta t} (D_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + D_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$$

-> le Décroissement logarithmique :

$$D = \delta T_0$$

-> Facteur de qualité :

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energie stockée}}{\text{Energie perdue par cycle}}$$

$$= \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{L \omega_0}{R} = \frac{1}{2\xi}$$

Exemple 1 :

- Système masse ressort-amortisseur

* Equation différentielle :

1-> l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

-> l'énergie cinétique du Système

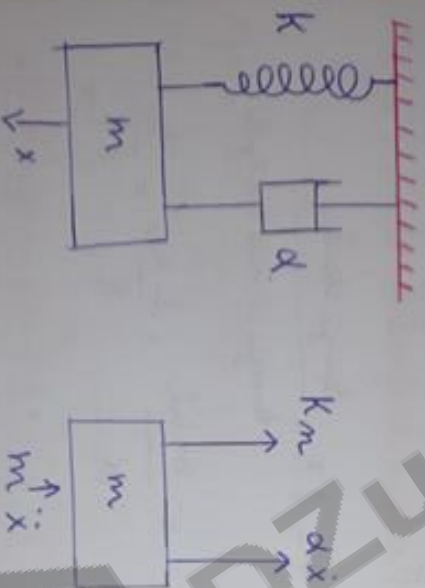
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

→ L'énergie potentielle du système :

$$U = \frac{1}{2} K m^2$$

→ la fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha m^2$$



→ la fonction de Lagrange

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K m^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -K m \end{cases}$$

dont :

$$m \ddot{x} + K m = -\alpha \dot{x} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = 0$$

→ la forme générale :

$$\ddot{q} + \frac{\alpha}{m} \dot{q} + \frac{K}{m} q = 0$$

→ Soient l'équation différentielle est écrit sous une forme dit réduite

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{K}{m}} \end{aligned} \right.$$

→ en dimensionnant la forme réduite :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

→ la solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

→ la solution générale de l'équation

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

$$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

* 1^{er} cas : Système sous-amorti

ou faiblement amorti

$$\delta < \omega_0 \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$= -\delta + j\omega_d$$

$$r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$= -\delta - j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

→ c'est la pulsation des oscillations amorties

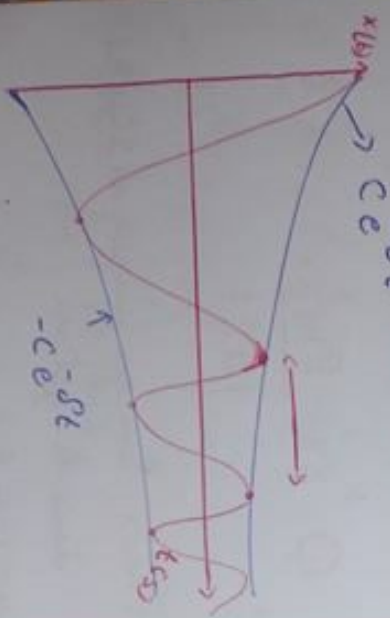
$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}$$

$$T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$T_a = P$ pseudo-période

→ la solution :

$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$



- 2^{ème} cas : Amortissement Critique :
 $\gamma_a = \gamma_c = -\delta \quad | \quad \delta = \omega_0 \quad (\xi = 1)$

→ la solution :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \quad \alpha t \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km} \quad \text{Valeur}$$



3^{ème} cas : Système Sur-amorti ou fortement amorti

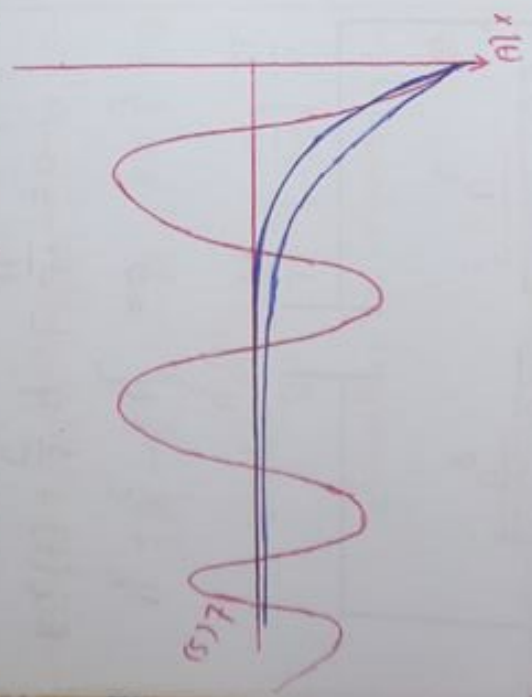
$$\delta > \omega_0 \quad (\xi > 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ \gamma_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

→ la solution :

$$x(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$$

→ est un mouvement non sinusoïdale



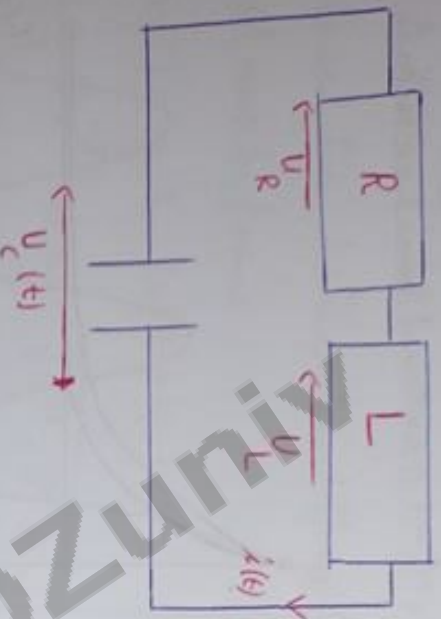
→ l'oscillateur harmonique électrique

- une résistance : R
- " condensateur : C
- une bobine : L

→ autre type d'oscillateur harmonique
 amorti dans un autre domaine de la physique : l'électrocinétique

Pour un système linéaire :

→ la loi de Kirchhoff :



$$U_R + U_L = 0$$

$$R i(t) + \frac{1}{C} q + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q + L \frac{dq}{dt^2} = 0$$

$$R \dot{q} + \frac{1}{C} q + L \ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

avec $\mathcal{S} = \frac{R}{2L}$ $\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\ddot{q} + 2\mathcal{S} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{S} = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

→ Pour un amortissement critique :

$$\mathcal{S} = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ Donc}$$

$$R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

→ Décroissement logarithmique :

Définition : C'est le logarithme

du rapport de 2 amplitudes

Successives des oscillations amorties

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}$$



Pour un système amorti :

l'indice a la masse m :

$$D = \frac{\ln(x)_t}{\ln(x)_t} = \mathcal{S} T_a$$

$$= 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

→ Facteur de qualité (Facteur de surtension)

→ Le facteur de qualité Q définit par l'expression Suivant :

$$Q = 2\pi \frac{E_{max}}{|AE|}$$

E_{max} : l'énergie maximale stockée dans le système

$|AE|$: l'énergie perdue par cycle

→ Calcul du facteur de qualité Système masse-amortissement (m, k, α)

Prevenons l'exemple d'un système masse-ressort-amortisseur.

(m, k, α) fait lement amorti dont

la solution de l'équation différentielle

est sous la forme :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = C e^{-\delta t} \text{ et } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$$

$$\Rightarrow E_{\max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$$

→ D'autre part :

$$\Delta E = \int_t^{t+\Delta t} F(t) dx$$

→ F(t) la force de frottement

$$Visqueux F(t) = -\alpha \dot{x}(t)$$

$$= -\alpha V(E)$$

⇒

$$\Delta E = -\alpha \pi \omega_0 x_0^2$$

donc :

$$Q = \frac{2 \pi \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}{\pi \alpha x_0^2 \omega_0} = \frac{m \omega_0}{\alpha}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{2 \delta} = \frac{1}{2 \xi}$$

→ calcul du facteur de qualité :

Système électrique (RLC)

Dans un système électrique (RLC) :

$$E_{\max} = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2$$

$$\Delta E = -\pi R q_0^2 \omega_0$$

$$Q = \frac{2 \pi \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2}{\pi R q_0^2 \omega_0} = \frac{L \omega_0}{R}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\xi}$$

« Oscillation force amorties : système à un degré de liberté »

1-→ Un mouvement unidimensionnel

x :

→ L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial x} + F_{ext}$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad | F_{ext} = F_0 \sin \omega t$$

→ L'équation différentielle sous la forme réduite :

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

→ Solution de l'équation différentielle du mouvement :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

* La solution homogène :

$$x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)$$

$$\text{et } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

→ La solution particulière :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\sin(\omega t + \text{Arctg}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right))$$

→ la variation de l'amplitude en

fonction de la position de la force :

$$\frac{A(\omega)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (2\zeta(\frac{\omega}{\omega_0}))^2}}$$

⇒ $\frac{A(\omega)}{A_0}$ est maximal pour :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{-2\zeta(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \text{tg } \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ Vx}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \text{tg } \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ Vx} \\ \zeta_1 = 0 \Rightarrow \text{tg } \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = -\pi \end{array} \right.$$

→ Faibles fréquences :

$$\zeta \ll 1 (\omega \ll \omega_0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = A_0 = \frac{F_0}{K} \\ \varphi = 0 \end{array} \right.$$

→ Hautes fréquences :

$$\zeta \gg 1 (\omega \gg \omega_0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \varphi = -\pi \end{array} \right.$$

→ La résonance :

$$\zeta_1 = 1 (\omega = \omega_0) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \\ \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

→ le facteur de qualité :

$$Q = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

→ Un mouvement rotatoire :

l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + F_{ext}$$

1° : l'aduction d'action de la force

$$F_{ext}$$

CHAPITRE III :

Oscillation forcées amorties :

Système à un degré de liberté

→ Équation différentielle du mouvement

1° pour un mouvement translation

on écrit :

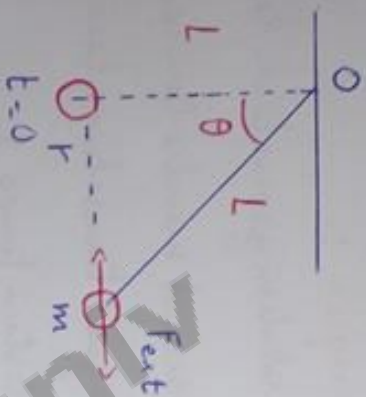
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F_{ext}$$

2° pour un mouvement de rotation

avec un angle θ , on écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + M(F_{ext})$$

$$\text{Tel que : } M(F_{ext}) = F \times L = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + F_{ext}$$



- $M(F_{ext})$: Est le moment de la force appliquée $[N \cdot m]$

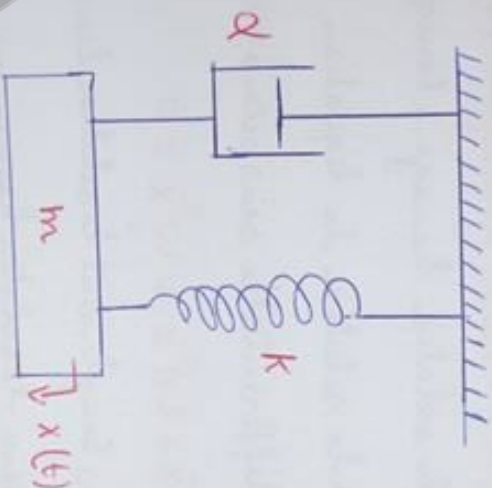
- **Le moment**: Caractère la capacité d'une

force à faire tourner un objet autour d'un point

- L : la bras du levier: est la distance droite d'action de la force

- r : la distance parcourue par la masse dans la direction de la force

→ Exemple: Système masse-ressort - amortisseur:



→ Reprenons le cas du pendule élastique (vertical)

→ étude de la vibration

avant et après de la

masse. Pouvons nous prévoir

masse en mouvement

force extérieure (F_{ext})

→ Equation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial x} + F_{ext} t$$

→ prenons une force sinusoïdale

appliquée à la masse m:

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t$$

→ l'énergie cinétique du système:

c'est l'énergie cinétique de la masse m:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

→ l'énergie potentielle du système:

c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort

$$U = \frac{1}{2} K x^2$$

→ la fonction de dissipation:

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

→ la fonction de Lagrange:

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -K x \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$$

→ En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t$$

→ L'équation différentielle est écrite sous la forme réduite

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

dans

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

tel que

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \text{facteur d'amortissement} \\ \omega_0 &= \frac{\sqrt{k}}{m} \Rightarrow \text{rapport d'amortissement} \end{aligned} \right.$$

→ Solution, (1^{re} équation)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

→ 2^e Solution homogène (1') :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

→ Simplement la solution transitoire

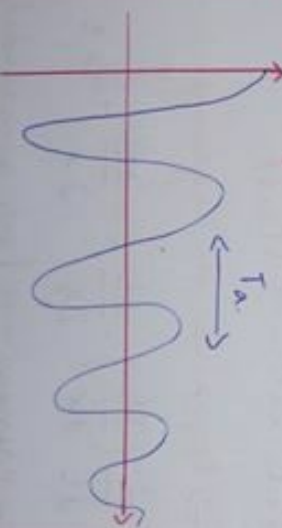
pour l'oscillateur harmonique

amorti en régime libre dans la

cas des oscillations librement

amorties : (solution)

$$x(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



- Remarque :

La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime transitoire (qui ne dure qu'un certain temps)