أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمريـــن الأول

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$.

إذن : معادلتها الديكارتية تُكتب على الشكل التالي :

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على الكتابة التالية :

$$(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$$

و هي عبارة عن معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

و لكي تكون $A(0,0,1)$ نقطة من نقط الفلكة $(\mathcal{S})$ ،

يكفي أن تُحقق إحداثياتها معادلة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $0^2+0^2+1^2-2\times 0+2\times 0-1=0$

إذن بالفعل نستنتج أن : $A\in(\mathcal{S})$

2 أ

لدينا : $\begin{cases} A(0,0,1) \\ B(1,1,1) \\ C(2,1,2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(1,1,0) \\ \overrightarrow{AC}(2,1,1) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تُكتَبُ بصفة عامة على الشكل :

$$(ABC) : ax+by+cz+d=0$$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإنه نستطيع أن نأخذ $a=1$ و $b=-1$ و $c=-1$.

إذن معادلة (ABC) تصبح : $(ABC) : x-y-z+d=0$

لإيجاد قيمة d نُعوض x و y و z بإحداثيات إحدى النقط A أو B أو C

نأخذ أسهل نقطة و هي $A(0,0,1)$.

لدينا : $A(0,0,1)\in(ABC)$

إذن : $0-0-1+d=0$ و منه : $d=1$

و بالتالي : المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تصبح :

$$\boxed{(ABC) : x-y-z+1=0}$$

2 ب

لدراسة الوضع النسبي لمستوى و فلكة نستدعي $d(\Omega,(ABC))$.

لدينا : $\Omega(1,-1,0)$ و $(ABC) : x-y-z+1=0$.

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1-(-1)-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega,(ABC))=Rayon(\mathcal{S})$

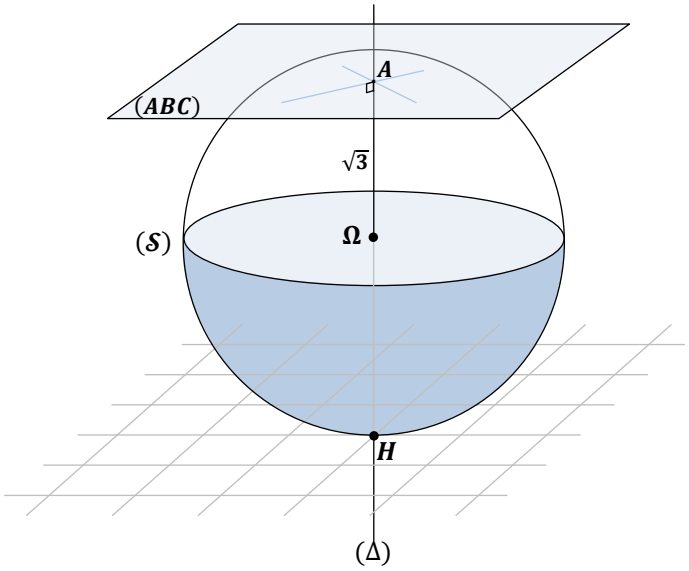
إذن (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة وحيدة و هي النقطة A .

لأن A هي النقطة المشتركة الوحيدة بين الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

يعني : $A\in(\mathcal{S})$ و $A\in(ABC)$.

3 أ

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالشكل التالي :



نضع : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) .

نعلم أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

إذن كل متجهة موجهة للمستقيم (Δ) تكون عمودية على المستوى (ABC) .

و من تم فإن كل متجهة موجهة للمستقيم (Δ) تكون مستقيمية مع $\vec{n}$.

لدينا : $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن : $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\vec{n}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\in\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$

يعني : $(\exists t\in\mathbb{R})\ ;\ \begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x-1=t \\ y+1=-t \\ z=-t \end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$

يعني : $\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=-t \end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لتكن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

إذن : $H\in(\mathcal{S})$ و $H\in(\Delta)$.

و لتحديد قيم المجاهيل α و β و γ نعوضها في كل من المعادلة الديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ و في التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) نحصل إذن على :

$$\begin{cases} \alpha=t+1 \\ \beta=-t-1 \\ \gamma=-t \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha+2\beta-1=0 \end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

نعوض α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة نجد :

$$(t+1)^2+(-t-1)^2+(-t)^2-2(t+1)+2(-t-1)-1=0$$

هذه الكتابة البشعة تصبح بعد النشر و التبسيط : $3t^2-3=0$

يعني : $t^2=1$ أي : $t=\pm 1$

www.baclive.blogspot.com

نعود إلى تعابير α و β و γ لتعويض قيمة t بـ 1 و -1 :

إذا كان : $t=1$ فإن : $H(2,-2,-1)$

إذا كان : $t=-1$ فإن : $H(0,0,1)$ يعني : $H\equiv A$

و منه (Δ) يقطع $(\mathcal{S})$ في نقطتين إحداهما A و الأخرى $H(2,-2,-1)$.

التمرين الثـــاني

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+25=0$

لدينا : $\Delta=(-8)^2-4\times 25=-36=(6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{8-6i}{2}=4-3i \\ z_2=\dfrac{8+6i}{2}=4+3i \end{cases}$$

2 أ

لدينا الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$T_{\overrightarrow{BC}} : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

ننطلق من الكتابة $T_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$.

إذن حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

نترجم هذه الكتابة المتجهية باللغة العقدية نجد : $(d-a)=(c-b)$

أي : $d-(4+3i)=10+3i-4+3i$

إذن : $d=10+9i$

2 ب

$$\frac{b-a}{d-a}=\frac{(4-3i)-(4+3i)}{(10+9i)-(4+3i)}=\frac{-6i}{6+6i}=\frac{-i}{1+i}$$

$$=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1^2-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{-1}{2}(i+1)$$

2 ج

لدينا : $\dfrac{b-a}{d-a}=\dfrac{-1}{2}(i+1)$

إذن : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{-1}{2}(i+1)\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\arg(i+1)\ [2\pi]$

و نعلم أن عمدة أي عدد حقيقي سالب يوافق π بترديد 2π .

يكفي الآن تحديد عمدة للعدد العقدي : $(1+i)$

لدينا :

$$(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$$

إذن : $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

و بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\arg(i+1)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right)\equiv\pi+\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

التمرين الثـــالث

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

$$u_{n+1}-1=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-1$$

$$=\frac{1}{5}u_n-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{5}(u_n-1)$$

2 أ

لتكن (P_n) العبارة المعرفة بما يلي : $(P_n) : (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>1$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=2>1$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن العبارة (P_n) صحيحة .

يعني نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n-1>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{5}(u_n-1)>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-1>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>1$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل على الوضعية التالية :

$$\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>1$

2 ب

لدراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ندرس إشارة الفرق : $(u_{n+1}-u_n)$

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}\right)-u_n$$

$$=\frac{-4}{5}u_n+\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}(u_n-1)$$

و نعلم حسب السؤال 2) أ) أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n-1>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{-4}{5}(u_n-1)<0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-u_n<0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 1 : $((\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>1)$.

فإنها متقاربة و سوف نحدد نهايتها بالاستعانة بالمتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

www.baclive.blogspot.com

3 أ

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = u_n - 1$$

لكي نبرهن على أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية عادة ما نُبيِّن أن الخارج $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ثابت كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} = \frac{\frac{1}{5}(u_n-1)}{(u_n-1)} = \frac{1}{5}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

إذن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

و منه فإن حدها العام v_n يُكتب على شكل : $v_n = v_0\left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = (u_0-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

3 ب

لدينا : $v_n = u_n - 1$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n - 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n$

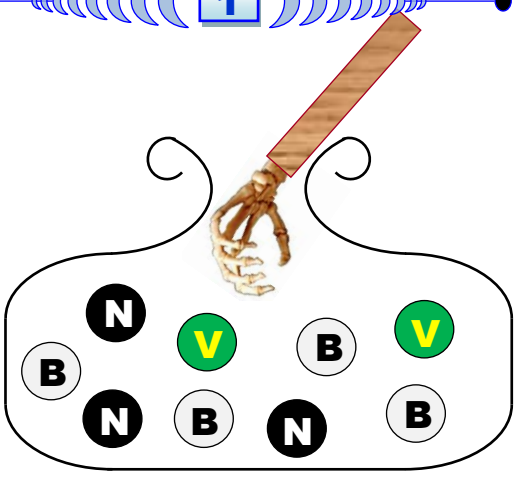
نلاحظ أن $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 0 + 1 = 1$

التمرين الرابع

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يحتوي على تسع بيدقات فإنه توجد C_9^3 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .

يعني : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$

بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

$$p(A) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث بيدقات}\\ \text{من نفس}\\ \text{اللون}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\ \text{أو}\ \begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{سوداء}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{سوداء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{سوداء}\end{array}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^3}{84} + \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84}$$

$$p(B) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{مختلفة}\\ \text{2à2}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{بيضاء}\\ \text{واحدة}\end{array}\ \text{و}\ \begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{خضراء}\\ \text{واحدة}\end{array}\ \text{و}\ \begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{سوداء}\\ \text{واحدة}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1}{84} = \frac{3\times 2\times 4}{84} = \frac{2}{7}$$

2 أ

يحتوي الكيس على ثلاث بيدقات سوداء و ست بيدقات تخالف اللون الأسود .

إذن : عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من هذا الكيس فإنه يُحتَمَلُ :

ألا نحصل على أية بيدقة سوداء : $[X=0]$

أو نحصل على واحدة سوداء و بيدقتين تخالفات الأسود : $[X=1]$

أو نحصل على بيدقتين سوداوين و بيدقة ثالثة غير ذلك : $[X=2]$

أو نحصل على ثلاث بيدقات كلها سوداء : $[X=3]$

إذن القيم التي يأخذها هذا المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

2 ب

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على بيدقة سوداء واحدة و الأخريين تخالفان اللون الأسود . إذن :

$$p[X=1] = p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{سوداء}\\ \text{واحدة}\end{array}\ \text{و}\ \begin{array}{c}\text{بيدقتان}\\ \text{تخالفان}\\ \text{الأسود}\end{array}\right) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84}$$

$$= \frac{3\times 15}{84} = \frac{15}{28}$$

الحدث : $[X=2]$ هو الحصول على بيدقتين سوداوين و بيدقة ثالثة تخالف اللون الأسود . إذن نحصل على :

$$p[X=2] = p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{تخالف}\\ \text{الأسود}\end{array}\ \text{و}\ \begin{array}{c}\text{بيدقتان}\\ \text{سوداوان}\end{array}\right) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84}$$

$$= \frac{3\times 6}{84} = \frac{3}{14}$$

www.baclive.blogspot.com

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0;1;2;3\}$ نحو المجال $[0,1]$ و الذي يربط كل قيمة k من قيم X باحتمال حدوثها $p[X=k]$.

لقد حصلنا لحد الآن على : $p[X=1]=\frac{15}{28}$ و $p[X=2]=\frac{3}{14}$.

لنحسب إذن : $p[X=0]$ و $p[X=3]$.

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على ثلاث بيدقات كلها تخالف اللون الأسود

إذن : $p[X=0]=\frac{C_6^3}{84}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$

و الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث بيدقات كلها سوداء .

إذن : $p[X=3]=\frac{C_3^3}{84}=\frac{1}{84}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X : \{0;1;2;3\} \longmapsto [0,1]$$

$$\begin{array}{lll} 0 & \longmapsto & P_X(0)=\frac{5}{21} \\ 1 & \longmapsto & P_X(1)=\frac{15}{28} \\ 2 & \longmapsto & P_X(2)=\frac{3}{14} \\ 3 & \longmapsto & P_X(3)=\frac{1}{84} \end{array}$$

N'oubliez surtout pas la clé de control et vérifier éventuellement la chose suivante :

$$\boxed{P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)+P_X(3)=1}$$

C'est une clé de control pour certains, certes. Mais aussi c'est une boite noire pour autrui.

التمرين الخامس

I 1

$$(2x+1)(x-1)=2x^2-2x+x-1=2x^2-x-1$$

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g(x)=x^2-x-\ln x$

$$g'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

I 3

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ g'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

و نلاحظ أن : $(\forall x>0)\ ;\ 2x+1>0$

إذن إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$.

إذا كان : $x=1$ فإن : $g'(x)=0$

إذا كان : $x>1$ فإن : $g'(x)>0$

إذا كان : $x<1$ فإن : $g'(x)<0$

و لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-x-\ln x)$$
$$=0-0-\ln 0^+=0-0-(-\infty)=+\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}(x^2-x-\ln x)$$
$$=\lim_{x\to +\infty} x\left(x-1-\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$=(+\infty)(+\infty-1-0)=+\infty$$

إذن : نلخص تغيرات الدالة g في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن :

- g تناقصية على المجال $]0;1]$.
- g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.
- و $g(1)=0$.

إذن 0 قيمة دنوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

II 1 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-1-(\ln x)^2)$$
$$=0^2-1-(\ln 0^+)^2$$
$$=0-1-(-\infty)^2$$
$$=0-1-(+\infty)$$
$$=(-\infty)$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (يعني محو الأفاصيل) مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين .

II 1 ب

لدينا :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(x^2-1-(\ln x)^2)$$
$$=\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$
$$=(+\infty)\times(1-0-0^2)$$
$$=(+\infty)$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2-1-(\ln x)^2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(x-\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$
$$=(+\infty)(1-0-0^2)$$
$$=(+\infty)$$

من النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

www.baclive.blogspot.com

II 2 أ

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$. لدينا : $f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$

إذن :
$$f'(x)=2x-2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=2\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)$$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-x-\ln x}{x}+1=x-1-\frac{\ln x}{x}+1$$
$$=\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1}{2}f'(x)$$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ \left(\frac{g(x)}{x}+1\right)=\frac{1}{2}f'(x)$

II 2 ب

نعلم حسب السؤال $3(I)$ أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ 2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)\geq 0$

يعني : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)\geq 0$

إذن : الدالة f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

و هو ما يوضحه الجدول التالي :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

II 3 أ

معادلة المماس (Δ) للمنحنى في النقطة $A(1,0)$ تُكتَبُ على الشكل التالي :

$$(\Delta)\ :\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

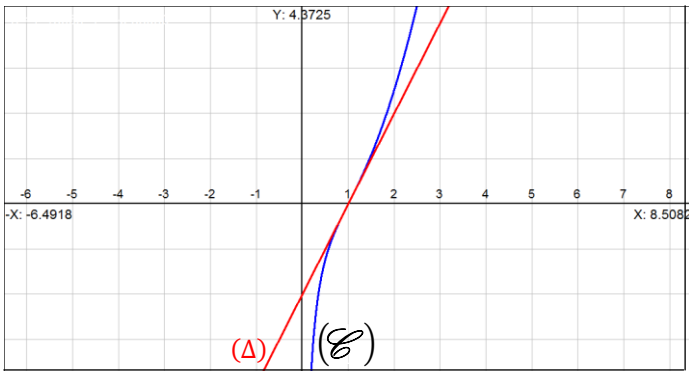
و لدينا : $f'(1)=2$ و $f(1)=0$

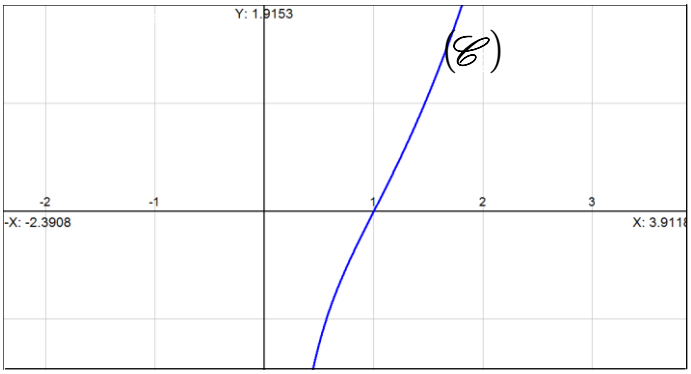
إذن المعادلة الديكارتية للمماس تصبح : $(\Delta):y=2(x-1)+0$

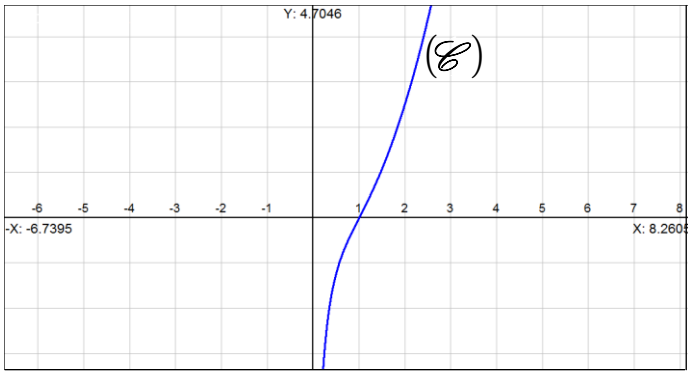
أي : $(\Delta):y=2x-2$

II 3 ب

فيما يلي بعض الصور التذكارية للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) .







II 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$(x(\ln x-1))'=1(\ln x-1)+x(\ln x-1)'$$
$$=\ln x-1+x\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\ln x-1+1=\ln x$$
$$=\ln x$$

إذن $x\longmapsto x(\ln x-1)$ دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

و سوف نستعمل هذه النتيجة لحساب التكامل : $\int_1^e \ln x\ dx$

و ذلك لأن : $[1;e]\subset]0;+\infty[$

$$\int_1^e \ln x\ dx=[x(\ln x-1)]_1^e$$
$$=e(\ln e-1)-1(\ln 1-1)$$
$$=e(1-1)-1(0-1)$$
$$=0-1(-1)$$
$$=1$$

II 4 ب

$$\int_1^e (\ln x)^2\ dx=\int_1^e \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(\ln x)^2}_{v}\ dx=[uv]-\int uv'$$
$$=[x(\ln x)^2]_1^e-\int_1^e x(2\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=[x(\ln x)^2]_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2-2\times 1$$
$$=e-0-2$$
$$=e-2$$

www.baclive.blogspot.com

II 4 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين : $x = 1$ و $x = e$

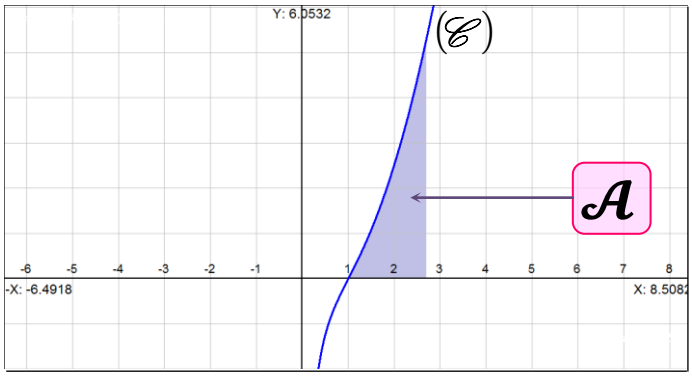
إذن : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\, dx$

و لدينا f دالة تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

إذن :
$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow f(x) \geq f(1) \\ &\Rightarrow f(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow |f(x)| = f(x) \end{aligned}$$

إذن بالعودة إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)|\, dx = \int_1^e f(x)\, dx \\ &= \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln x)^2)\, dx \\ &= \int_1^e x^2 dx - \int_1^e 1\, dx - \int_1^e (\ln x)^2\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - [x]_1^e - (e-2) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - e + 1 - (e-2) \\ &= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3} \\ &\approx 3{,}92\ (unité)^2 \\ &\approx 3{,}92\ (1\ cm)^2 \\ &\approx 3{,}92\ cm^2 \end{aligned}$$



ملاحظة : لاحظ أنه عندما نغير وحدة المعلم . فإن المساحة $\mathcal{A}$ تتغير كما يلي

نُغير وحدة المعلم و نأخذها تساوي مثلا $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\ cm$.

إذن $\mathcal{A}$ تصبح :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx 3{,}92\ (unité)^2 \\ &\approx 3{,}92\ (3\ cm)^2 \\ &\approx 3{,}92 \times 9\ cm^2 \\ &\approx 35{,}28\ cm^2 \end{aligned}$$

لذلك وجب الإنتباه إلى وحدة المعلم و كيفية استعمالها .

www.baclive.blogspot.com