UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES
RABAT

Semestre Printemps-Eté 2015 / SMPC-S2
Module: Electrostatique-Electrocinétique

T.D d'Electrostatique N°2
Force et Champ Electrostatique

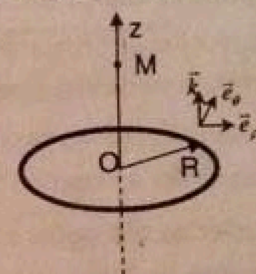
Exercice 1.

Deux charges électriques ponctuelles, identiques ($q_A = q_B = q = +2\mu C$) sont placées respectivement en A et B suivant l'axe Oz (OA = OB = a = 30cm). Une troisième charge (Q=+4μC) est placée en M sur l'axe Ox à l'abscisse OM = x.

1) Déterminer la force résultante $\vec{F}$ exercée par (q_A, q_B) sur la charge Q placée en M.
   Exprimer le module de $\vec{F}$ en fonction de x et montrer que F(x) passe par un maximum : F_{max}, calculer sa valeur.
2) Déterminer $\vec{F}$ résultante agissante sur Q dans le cas où $q_A = +q$ et $q_B = -q$.

Exercice 2.

Un anneau (fil circulaire) de centre O et de rayon R, est chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda_0 > 0$. L'axe Oz est perpendiculaire en O au plan de l'anneau (figure ci-après). Une charge ponctuelle $q > 0$ est placée en M sur l'axe Oz (OM = z).

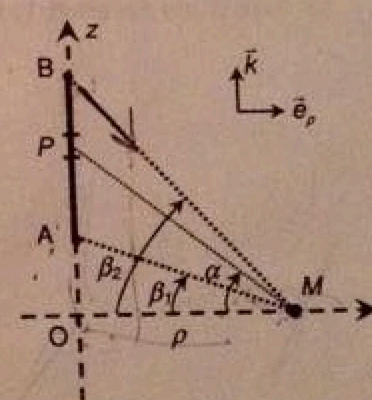


On utilisera le système de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

1) Calculer en fonction de λ_0 et R la charge totale Q de l'anneau.
2) Calculer la force électrostatique $\vec{F}$ qu'exerce l'anneau sur la charge q.
   En déduire la valeur de $\vec{F}$ dans le cas où q est placée en O.
3) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par l'anneau en tout point M de l'axe Oz.

Exercice 3.

1) Calculer en un point M de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par un fil rectiligne AB de longueur 2L, d'axe Oz et portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$. Soit O la projection de M sur l'axe Oz tel que : OM = ρ.
   Les points A et B sont repérés par les angles β_1 et β_2 (figure ci-contre)
   a) Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges, et déterminer la direction et les variables dont dépendent les composantes de $\vec{E}(M)$.
   b) Déterminer en fonction de β_1 et β_2 l'expression de $\vec{E}(M)$



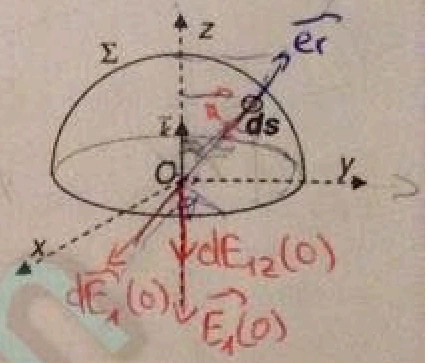
2) En déduire $\vec{E}(M)$ en un point M appartenant au plan médiateur du segment AB. L'exprimer en fonction de L. Indiquer les éléments de symétrie dans ce cas.
3) En déduire le champ $\vec{E}(M)$ créé par un fil rectiligne infini en un point M n'appartenant pas au fil. Préciser la symétrie.
4) Calculer $\vec{E}(M)$ dans le cas où le point M est situé sur l'axe du fil AB (axe Oz) à la distance $OM = z_0$. (M $\notin$ au fil et on prendra O milieu de AB).

-Les invariances φ, θ, translation
-Les symétrie $(\vec{e}_\rho ; \vec{e}_\varphi ; \vec{k})$

Habib
Kadi

Exercice 4.

1) On considère une demi-sphère Σ de rayon R et d'axe Oz, chargée uniformément avec une densité surfacique $\sigma_0 > 0$.



a) En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de charge, donner la direction et le sens du champ $\vec{E}_1(O)$ créé au point O.

b) Calculer le module de $\vec{E}_1(O)$.

2) On considère maintenant une distribution volumique de charge ayant la forme de la demi-sphère Σ de la question **1)** et portant la densité volumique de charge $\rho_0 > 0$.

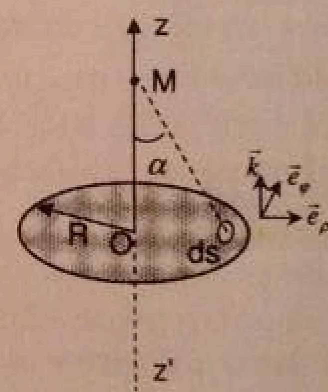
a) Déterminer par un calcul direct le champ électrostatique $\vec{E}_2(O)$ créé en O par la distribution volumique de charge.

b) En supposant que la distribution volumique de charge est obtenue par la superposition de couches sphériques concentriques dont le rayon varie de 0 à R, retrouver à partir de la question **1)** le champ $\vec{E}_2(O)$ créé en O.

Exercice 5.

On considère un disque *D*, de centre *O*, d'axe *z'Oz* et de rayon *R*, uniformément chargé avec la densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) Etudier les propriétés de symétrie et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'axe z'Oz (OM = z). Préciser les variables dont dépend $\vec{E}(M)$.



2) Déterminer en fonction de z le module de $\vec{E}(M)$, noté *E(z)*.

3) Etudier les cas limites (z >> R et z << R) et tracer la courbe de variation de *E(z)*. Le champ est-il continu en z = 0 ?

4) En déduire l'expression du champ créé en tout point M de l'espace par un plan infini (xOy) uniformément chargé ($\sigma > 0$). Préciser dans ce cas les éléments de symétrie et les invariances.

5) Utiliser le théorème de superposition pour déterminer le champ sur l'axe d'une ouverture circulaire vide percée dans un plan infini chargé.

*****

Habib
Kadi

1

Electrostatique

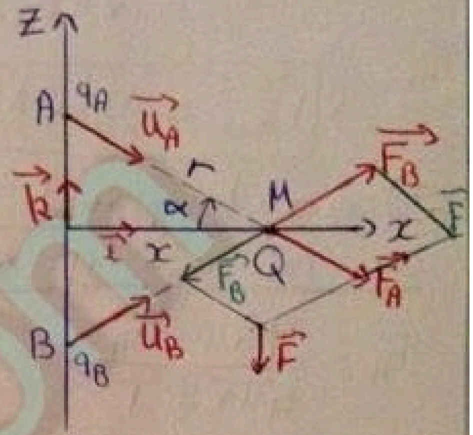
serie 2

Exercice 1 :

$q_A = q_B = q = 2\mu C = 2.10^{-6}C$

1

on a $OA = OB = a$ et $OM = x$ et $Q = 4\mu C = 4.10^{-6}C$



- La charge q_A exerce sur Q une force éléctrostatique :

$\cdot \vec{F_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A Q}{AM^3}\vec{AM} = \frac{q_A Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u_A}}{r_A^2}$

- La charge q_B exerce sur Q une force éléctrostatique:

$\cdot \vec{F_B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B Q}{BM^3}\vec{BM} = \frac{q_B Q}{r_B^2}\cdot\frac{\vec{u_B}}{4\pi\varepsilon_0}$

on a $\vec{F}$ résultante $= \vec{F_A} + \vec{F_B}$

$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u_A} + \vec{u_B})$ avec $\boxed{\vec{u_A} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{k}}$ et $\boxed{\vec{u_B} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{k}}$

donc $\boxed{\vec{u_A} + \vec{u_B} = 2\cos\alpha\,\vec{i}}$

$\Longrightarrow \vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times 2\cos\alpha\,\vec{i}$

- on exprime r et cos α en fonction de x :

$\cdot r^2 = x^2 + a^2$ et $\cdot \cos\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$

Habib Kadi

donc $\boxed{\vec{F} = \frac{qQ\,x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}}$

Module de $\vec{F}$: $\boxed{F(x) = \frac{qQ\,x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}}$

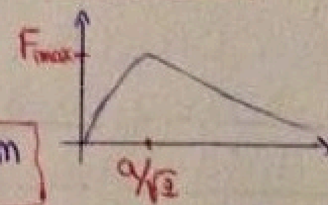
max F :

on a $\frac{dF(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2+a^2)^{1/2}\times 2x^2}{(x^2+a^2)^3}\right)$

$\Rightarrow \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+a^2)^{1/2}(x^2+a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^3}$

$$\Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(a^2-2x^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}}$$ 1'

donc $F_{max} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a/\sqrt{2}}{(\frac{a^2}{2}+a^2)^{3/2}}$



$\Rightarrow \boxed{F_{max} = 0{,}62\,N}$ et $\boxed{x_{max} = 21{,}2\,cm}$

2 on détermine $\vec{F}$ résultante agissante sur Q dans le cas où $q_A = +q$ et $q_B = -q$:

$\vec{F_A} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_A}}{r^2}$ et $\vec{F_B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_B}}{r^2}$

on a $\vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u_A} - \vec{u_B}) = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2\sin\alpha\,\vec{k}$

donc $\boxed{\vec{F} = -\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}} \vec{k}}$

Habib Kadi

Exercice 2 :

1 La charge totale Q de l'anneau :

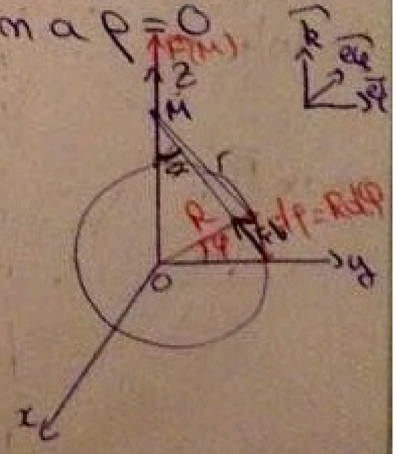
$Q = \int dq = \int_0^{2\pi} \lambda_0 R\,d\varphi = 2\pi R \lambda_0 \Leftrightarrow \boxed{Q = 2\pi R\lambda_0}$

2 Calcule de la force :

* Symétrie : Tout plan contenant Oz est un plan de symetrie plan $(M; \vec{k}; \vec{e_\rho})$

$\Rightarrow$ Symétrie axiale suivant Oz $\Rightarrow \vec{F}(M) = F_z(\rho; \varphi; z)\vec{k}$

* Invariance : par rotation autour de Oz $\Rightarrow$ F ne dépend pas de φ ; M est sur l'axe oz. on a $\rho = 0$



donc $\vec{F}(M) = F_z(z)\vec{k}$

$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq\,q}{r^2} \vec{u}$ avec $dq = \lambda_0 R\,d\varphi$

Proj/oz $\Rightarrow d\vec{F_z} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R\,d\varphi \cdot q}{r^2} \cos\alpha\,\vec{k}$

$\Rightarrow d\vec{F_z} = \frac{\lambda_0 R q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\,d\varphi}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{F}(M) = \int d\vec{F}_z = \frac{\lambda_0 R q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{F}(M) = \frac{\lambda_0 R q z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k} = F_z(z)\vec{k}$$

on a le plan de l'anneau est un plan de symétrie :

$$\Rightarrow F(-z) = -F(z) \Rightarrow \boxed{\vec{F}(M) = \frac{\lambda_0 R \cdot q |z|}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k}}$$

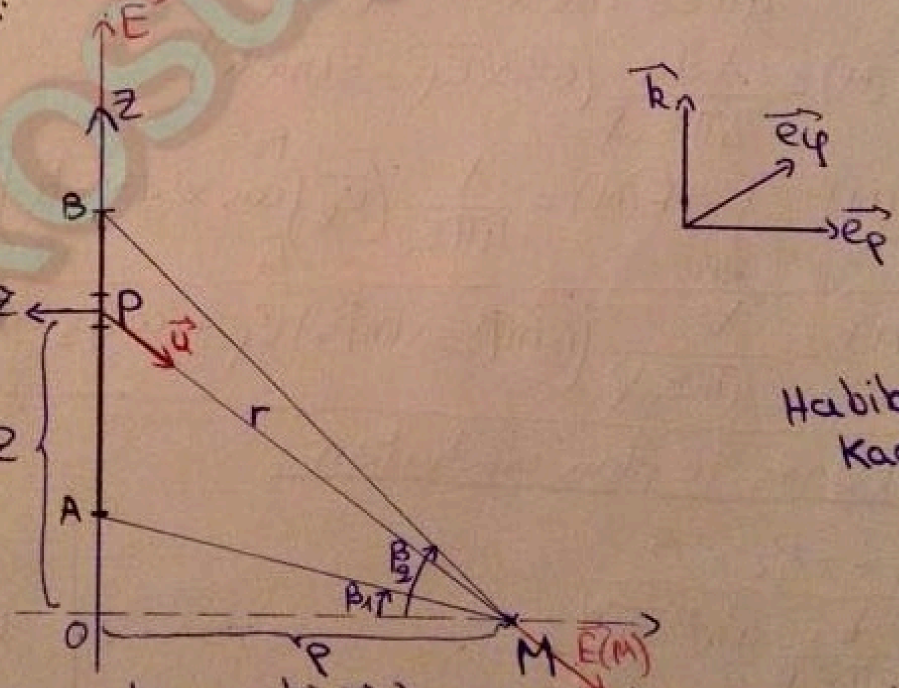
* La valeur de $\vec{F}$ dans le cas où q est placée en O :

$\vec{F}(0)$ en O $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow \boxed{F(0) = 0}$

3 Le champ électrostatique $\vec{E}(m)$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 R |z| \vec{k}}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}}$$

Exercice 3 :



Habib Kadi

1 a- Symétrie : Le plan $(M; \vec{k}, \vec{e_\rho})$ est un plan de symétrie

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_\rho(\rho;\varphi;z)\vec{e_\rho} + E_z(\rho;\varphi;z)\vec{k}$$

* Invariance par rotation /Oz $\Rightarrow E(m)$ ne dépend pas de φ

Le point M est sur l'axe $\vec{e_\rho} \Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_\rho(\rho)\vec{e_\rho} + E_z(\rho)\vec{k}$

b) on exprime $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

Habib Kadi

avec $\boxed{\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e_\rho} - \sin\alpha\,\vec{k}}$

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\cos\alpha\,\vec{e_\rho} - \sin\alpha\,\vec{k})}{r^2}$$

avec $\tan\alpha = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho\tan\alpha \Rightarrow \boxed{dz = \rho\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}$

et $\cos\alpha = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}}$

$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\rho^2}(\cos\alpha\,\vec{e_\rho} - \sin\alpha\,\vec{k})$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\lambda d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\alpha\,\vec{e_\rho} - \sin\alpha\,\vec{k})$$

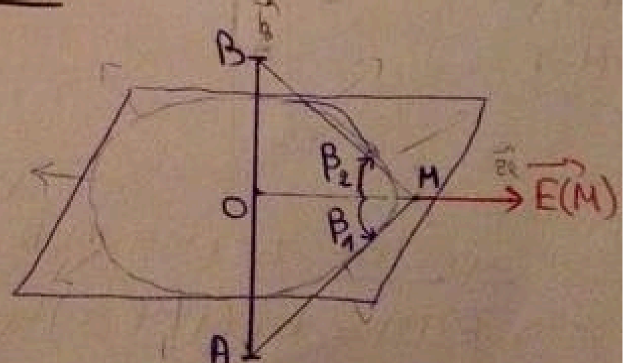
$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \int_{AB} d\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{e_\rho}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\alpha\,d\alpha - \vec{k}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\alpha\,d\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\vec{e_\rho} + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)\vec{k}\right]}$$

2) $\vec{E}(M)$ dans le plan médiateur :

on a $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\beta\,\vec{e_\rho}}$$



* Symétrie : Les plans $(M; \vec{k}; \vec{e_\rho})$ et $(M; \vec{e_\rho}; \vec{e_\varphi})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E_\rho(\rho)\vec{e_\rho}}$$

3 # Electrostatique

3 Champ crée en M par un fil infini rectiligne:

on a $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\vec{e_\rho}}$$

* Symétrie : Tout plan $\perp Oz$ est un plan de symétrie.

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_\rho(\rho;\varphi;z)\vec{e}_\rho$

Invariance par rotation/Oz et par translation suivant Oz.

4 symetrie: tout plan contenant l'axe Oz est plan de symetrie

$\Rightarrow$ symetrie axiale suivant Oz $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z(\rho,\varphi,z)\vec{k}$

$\Rightarrow$ par rotation (Oz et M est l'axe Oz $\Rightarrow \rho = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}}$$

on exprime $d\vec{E}(M)$:

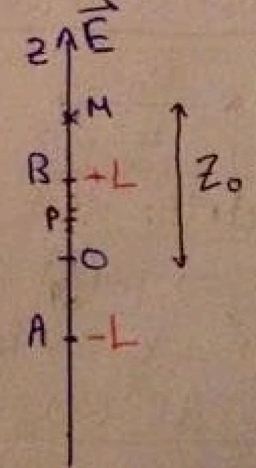
la charge élémentaire $dq = \lambda dz$ crée en M un champ élémentaire.

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dz}{PM^2}\vec{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{(z_0-z)^2}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \int_{AB} d\vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dz}{(z_0-z)^2} = \frac{\lambda\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{z_0-z}\right]_{-L}^{+L}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{z_0-L} - \frac{1}{z_0+L}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda L\vec{k}}{2\pi\varepsilon_0(z_0^2-L_0^2)}}$$



Habib Kadi

Exercice (4) ③'

symetrie: tout plan contenant Oz est plan symetrie

a) point O(0;0;0) => symetrie axiale suivant Oz:

$\Rightarrow \vec{E_1}(O) = -E_1(O)\,\vec{k}$ $(\Rightarrow E(O))$

On exprime $d\vec{E_1}(O)$:

La charge élém: $dq = \sigma_0\, ds$ crée en O un champ élém

$\Rightarrow d\vec{E_1}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0\, ds}{R^2}\vec{u}$ avec $\vec{u} = -\vec{e_r}$

Habib Kadi

$\Rightarrow d\vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e_r}$

Proj/Oz $\Rightarrow d\vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\, dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\vec{k}$

avec $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{e_\rho} \Leftrightarrow \boxed{\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{k}}$

car le champ dépend seulement de $\vec{k}$.

$\Rightarrow \vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\iint R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\cos\theta$

$\Rightarrow \vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\vec{k}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$\Rightarrow \vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\vec{k}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E_1}(O) = \frac{-\sigma_0\vec{k}}{4\varepsilon_0}}$

b) Le module de $\vec{E_1}(O)$:

$$\boxed{\|\vec{E_1}(O)\| = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}}$$

(2) a) symetrie: tout plan contenant Oz est plan de symetrie => point O(0;0;0) => symetrie axiale suivant Oz

$\Rightarrow \vec{E_2}(O) = E_2(O)\,\vec{k}$

On exprime $d\vec{E_2}(O)$:

La charge élém: $dq = \rho_0\, dv$ crée en O un champ élém.

$d\vec{E_2}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, dv}{r^2}\vec{u}$ avec $\vec{u} = -\vec{e_r}$

$$\Rightarrow d\vec{E_2}(O) = \frac{-\rho_0 \, dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}$$

Proj/Oz $\Rightarrow d\vec{E_{2z}}(O) = \frac{-\rho_0 \, dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta \, \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{E_2}(O) = \frac{-\rho_0 \vec{k}}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \cos\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E_2}(O) = -\frac{\rho_0 \vec{k}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

donc $\boxed{\vec{E_2}(O) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} R \vec{k}}$

b) Le champ $\vec{E_2}(O)$ crée en O:

on a $Q_{surf} = \sigma_0 2\pi R^2 \Rightarrow$ La charge totale portée par Σ

$\sigma_0 = \frac{Q_{surf}}{2\pi R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E_{1R}}(O) = \frac{-Q_{surf} \, \vec{k}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}}$

$\Rightarrow$ La charge contenue dans une couche sphérique:

$dQ_{sph} = \rho_0 2\pi r^2 dr$ correspond à la charge surfasique

$\boxed{Q_{suf} = dQ_{sph}} \Rightarrow Q_{surf} = \sigma_0 2\pi r^2$

$\Rightarrow$ Le champ $\vec{E_{2r}}(O)$ crée par la couche sphérique de rayon r

est : $d\vec{E_{2r}}_{sph}(O) = \vec{E_{1r}}_{surf}(O) \Rightarrow d\vec{E_{2r}}(O) = \frac{-Q_{surf}}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{k}$

$$\Rightarrow d\vec{E_{2r}}(O) = -\frac{\rho_0 2\pi r^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{E_{2r}}(O) = -\frac{\rho_0 \, dr}{4\varepsilon_0} \vec{k} \Rightarrow \vec{E_2}(O) = -\int_0^R \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} dr \, \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_{2r}}(O) = -\frac{\rho_0 R}{4\varepsilon_0} \vec{k}}$$

Habib Kadi

Exercice 5

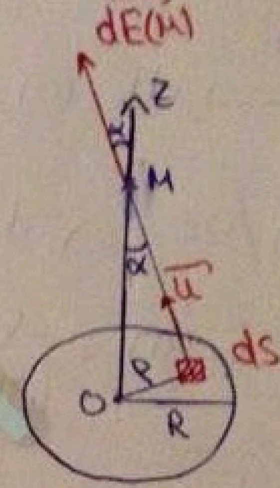
4'

1 symétrie : axiale suivant Oz :

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z(\rho, \varphi, z)\,\vec{k}$

Invariance : par rotation/Oz

$\rho = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{k}$



2 on exprime $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}$

proj/Oz : $d\vec{E_z}(M) = \frac{\sigma_0\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\,\vec{k}$

Les variables d'integration sont :

$\varphi : 0 \longrightarrow 2\pi$ et $\rho : 0 \longrightarrow R$

Habib Kadi

on a $\cos\alpha = \frac{z}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} \Longrightarrow r^2 = (z^2+\rho^2)$

donc $d\vec{E_z}(M) = \frac{\sigma_0\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,z\,\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0(z^2+\rho^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \iint_D dE_z(M) = \frac{z\sigma_0\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{2\rho\,d\rho}{2(z^2+\rho^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 z\vec{k}}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(z^2+\rho^2)^{1/2}}\right]_0^R$

donc $\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right]\vec{k}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}} \Rightarrow \boxed{\text{si } z>0}$

$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}} \Rightarrow \boxed{\text{si } z<0}$

 Eléctrostatique serie ②

Le module de $\vec{E}(M)$, noté $E(z)$:

on $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left(\dfrac{1}{|z|} - \dfrac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right) \vec{k} = E(z)\vec{k}$

donc $\boxed{E(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right) ; z>0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \dfrac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right) ; z<0 \end{cases}}$

Habib Kadi

③ Valeur limite : $z \gg R$ et $z \ll R$:

① $z \gg R \Longrightarrow R/z \ll 1$:

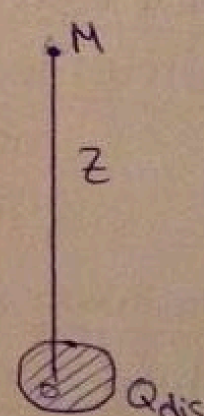
$E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z}{|z|(1+(R/z)^2)^{1/2}}\right]$

D.L

$E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z}{|z|}\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{z}\right)^2\right)\right]$ avec $\boxed{\begin{aligned} &\dfrac{1}{(1+(R/z)^2)^{1/2}} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R}{z}\right)^2 \\ &(1+x)^n = 1 + nx \end{aligned}}$

$E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \dfrac{R^2}{2z^2} \dfrac{z}{|z|}$

$E(z) = \dfrac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \cdot \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{Q_{disque}}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \cdot \dfrac{z}{|z|}$



donc $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{Q_{Dis}}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \cdot \dfrac{z}{|z|}\vec{k}}$

⇒ C'est le champ crée en M par une charge ponctuelle placée en O $(OM = z)$

② $z \ll R \Longrightarrow \dfrac{z}{R} \ll 1$;

$E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z/R}{(1+(z/R)^2)^{1/2}}\right) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}$

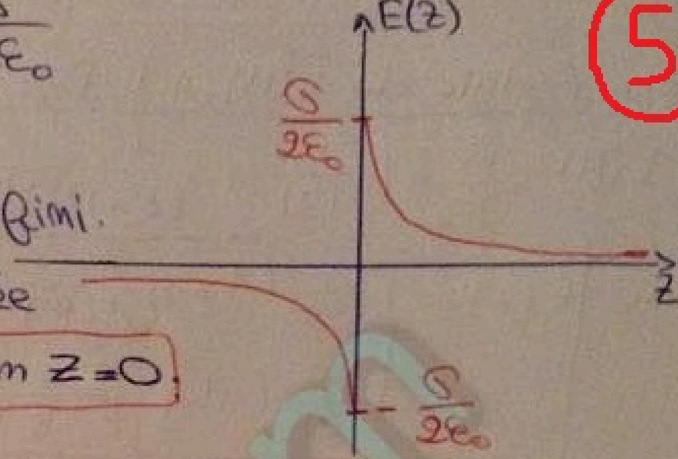
donc $\boxed{E(z) = \pm \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ ⇒ c'est le champ crée par plan infini.

5'

* $z \to 0 \Rightarrow E(z) \to \frac{\pm\sigma}{2\varepsilon_0}$

* $z \to \infty \Rightarrow E(z) \to 0$

en $z=0$ le champ est non défini.
car on a une surface chargée
et $\boxed{\text{le champ est discontinu en } z=0}$



La discontinuité :

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Habib Kadi

4) Champ crée par un plan infini :

plan = Disque $(R \to \infty)$

$E_{plan}(z) = E_{disque}(R \to \infty) \Leftrightarrow E_{plan}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}}$$

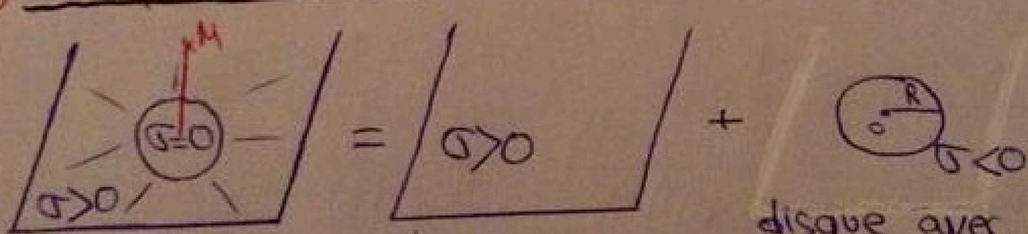
Les éléments de symetrie et les invariances :

Symétrie : tout plan perpendiculaire au plan (σ) et passant par M est un plan de symétrie.

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$$

Invariance : Le champ ne dépendra que de z.

5) Champ sur l'axe d'une ouverture dans le plan (vide de charge)



plan avec $\sigma>0$

disque avec $\sigma<0$

6 # Eléctrostatique

serie 2

Principe de superposition:

on a $\vec{E}_{ouv}(M) = \underset{\substack{plan \\ \sigma>0}}{\vec{E}(M)} + \underset{\substack{disque \\ \sigma<0}}{\vec{E}(M)}$

* pour $z>0$:

$$\vec{E}_{ouv}(M) = \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right)\right)\right]\vec{k}$$

donc $$\boxed{\vec{E}_{ouv}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{1/2}}\vec{k}}$$

Habib Kadi