

## عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة - تساوي دالتين - التمثيل المبراني لدالة

1/ تعريف دالة - مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  في الحالات التالية

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{5}{4-x} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{3-x}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+2x-3} \quad (c)$$

الحل

$$f(x) = \frac{5}{4-x} \quad (a)$$

لتكن  $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \quad \text{تكافئ} \quad 4-x \neq 0$$

$$\text{تكافئ} \quad x \neq 4$$

$$\text{اذن} \quad D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad (b)$$

$$x \in D_f \quad \text{تكافئ} \quad 2x+1 \geq 0$$

$$\text{تكافئ} \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{اذن} \quad D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$; \quad f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+2x-3} \quad (c)$$

$$x \in D_f \quad \text{تكافئ} \quad x^2+2x-3 \neq 0$$

ليكن  $\Delta$  مميز ثلاثية الحدود  $x^2+2x-3$

$$\Delta = 4+12=16$$

$$\text{و منه لـ } x^2+2x-3 \text{ جرين هما } x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$$

$$\text{اذن} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي  $f$  اذا ربطنا كل عدد من  $\mathbb{R}$  على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ  $f(x)$ .

$f(x)$  تقرأ صورة  $x$  بالدالة  $f$  أو باختصار  $f$  لـ  $x$

تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي .  
مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة  $f$   
نرمز لها بـ  $D_f$

2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين  $f$  و  $g$  لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$$f(x) = x - 1 ; \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} ; \quad g(x) = \frac{2}{x(x + 2)} \quad (b)$$

a/ لدينا  $D_f = \mathbb{R}$  و  $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ومنه  $D_f \neq D_g$  إذن  $f \neq g$

b/ لدينا  $D_g = D_f = \mathbb{R}^* - \{2\}$

لتكن  $x \in \mathbb{R}^* - \{2\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x + 2 - x}{x(x + 2)} = \frac{2}{x(x + 2)} = g(x)$$

إذن  $f = g$

**تعريف**

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون  $f$  و  $g$  متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس مجموعة التعريف  $D$  و لكل  $x$  من  $D$

$$f(x) = g(x)$$

3- التمثيل المبياني لدالة

نشاط

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} \quad \text{نعتبر الدالة العددية } f \text{ للمتغير الحقيقي } x \text{ حيث}$$

أ- حدد  $D_f$

ب - حدد أرتوبي  $A$  و  $B$  نقطتين من المنحنى  $C_f$  أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط  $C(2;0)$  ;  $D(-4;6)$  ;  $E(4;-6)$  تنتمي إلى  $C_f$

د - أكتب  $f(x)$  بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى  $C_f$  في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**الحل**

أ- نحدد  $D_f$

$$x \in D_f \text{ تكافئ } |x| - 2 \neq 0$$

$$|x| \neq 2 \text{ تكافئ}$$

$$x \neq 2 \text{ أو } x \neq -2 \text{ تكافئ}$$

$$\text{إذن } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

ب - نحدد أرتوبي  $A$  و  $B$  نقطتين من المنحنى  $C_f$  أفصوليهما على التوالي 0 و 3

$$\text{لدينا } f(0) = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ و منه } A(0;2) \in C_f$$

$$\text{لدينا } f(3) = \frac{9-4}{3-2} = 5 \text{ و منه } B(3;5) \in C_f$$

ج- هل النقط  $C(2;0)$  ;  $D(-4;6)$  ;  $E(4;-6)$  تنتمي إلى  $C_f$

$$\text{لدينا } 2 \notin \mathbb{R} - \{-2; 2\} \text{ و منه } C(2;0) \notin C_f$$

$$\text{لدينا } f(-4) = \frac{16-4}{4-2} = 6 \text{ و منه } D(-4;6) \in C_f$$

$$\text{لدينا } f(4) = \frac{16-4}{4-2} = 6 \text{ و منه } E(4;-6) \notin C_f$$

د - نكتب  $f(x)$  بدون رمز للقيمة المطلقة

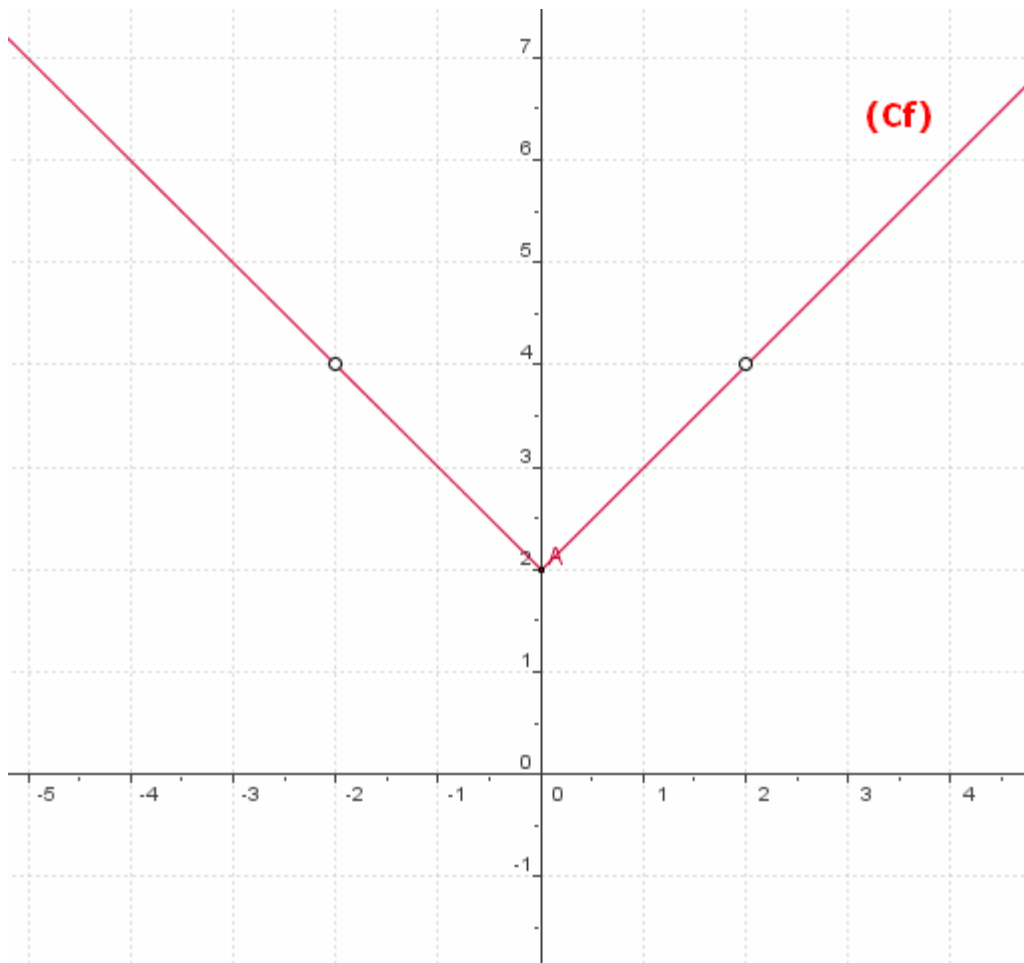
لدينا إذا كان  $x \in [0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  فإن  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

إذا كان  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 0]$  فإن  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{-x-2} = -x+2$

ننشئ المنحنى  $C_f$

معادلة جزء  $C_f$  على  $[0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  هي  $y = x+2$  و منه  $C_f$  نصنع مستقيم أصله النقطة  $A(0; 2)$  محروم من النقطة ذات الأفصول 2

معادلة جزء  $C_f$  على  $] -\infty; -2[ \cup ]-2; 0]$  هي  $y = -x+2$  و منه  $C_f$  نصنع مستقيم أصله النقطة  $A(0; 2)$  محروم من النقطة ذات الأفصول - 2



#### تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي .  
التمثيل المبياني للدالة  $f$  ( أو منحنى الدالة  $f$  ) هو مجموعة النقط  $M(x; f(x))$  حيث  $x \in D_f$  نرمز لها بالرمز  $C_f$   
 $C_f = \{M(x; f(x)) / x \in D_f\}$

#### ملاحظة

$M(x; y) \in C_f$  تكافئ  $y = f(x)$  و  $x \in D_f$   
العلاقة  $y = f(x)$  تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى  $C_f$

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $D_f$  حيز تعريفها  
 نقول ان  $f$  دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :  
 $*$  لكل  $x$  من  $D_f$   $-x \in D_f$   
 $*$  لكل  $x$  من  $D_f$   $f(-x) = f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية  $f$  زوجية في الحالات التالية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (b) ; \quad f(x) = |x| - \frac{1}{x^2} \quad (a)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \leq x < 4 \\ f(x) = -2x & x < 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$f(x) = |x| - \frac{1}{x^2} \quad /a$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$-x \in \mathbb{R}^* \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لدينا لكل}$$

$$x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لتكن}$$

$$f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

إذن  $f$  دالة زوجية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad /b$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ومنه } f(-1) \neq f(1)$$

$f$  دالة غير زوجية

$$\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \leq x < 4 \\ f(x) = -2x & x < 0 \end{cases} \quad /c$$

$$D_f = ]-\infty; 0[ \cup [0; 4[ = ]-\infty; 4[$$

نلاحظ أن  $-6 \in D_f$  و  $6 \notin D_f$  إذن  $f$  دالة غير زوجية

ب التمثيل المبراني لدالة زوجية

$f$  دالة زوجية و  $C_f$  منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $(x; f(x))$  من  $C_f$  و  $M'(-x; f(x))$  مماثلتها بالنسبة لمحور الأرتاب .

$$\text{ومنه } M'(-x; f(x))$$

و حيث أن  $f$  زوجية فان  $-x \in D_f$  و  $f(-x) = f(x)$

$$\text{ومنه } M'(-x; f(-x)) \text{ و بالتالي } M' \in C_f$$

إذن  $C_f$  متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

العكس

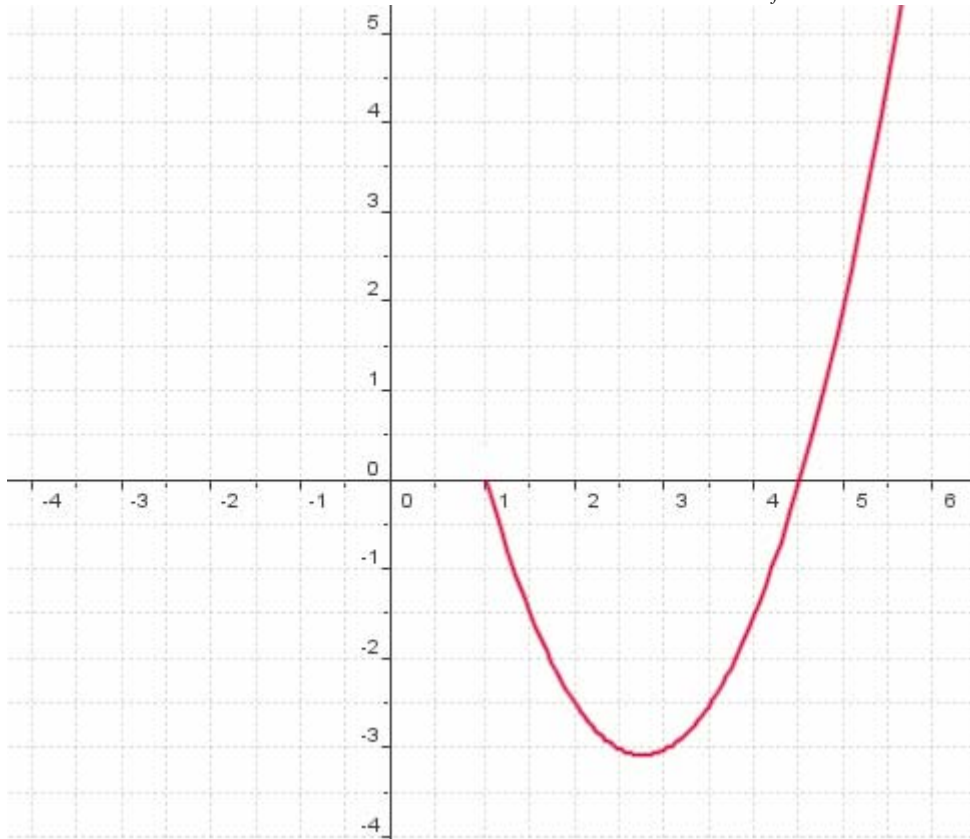
بين أنه إذا كان  $C_f$  متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب فان  $f$  دالة زوجية

خاصة

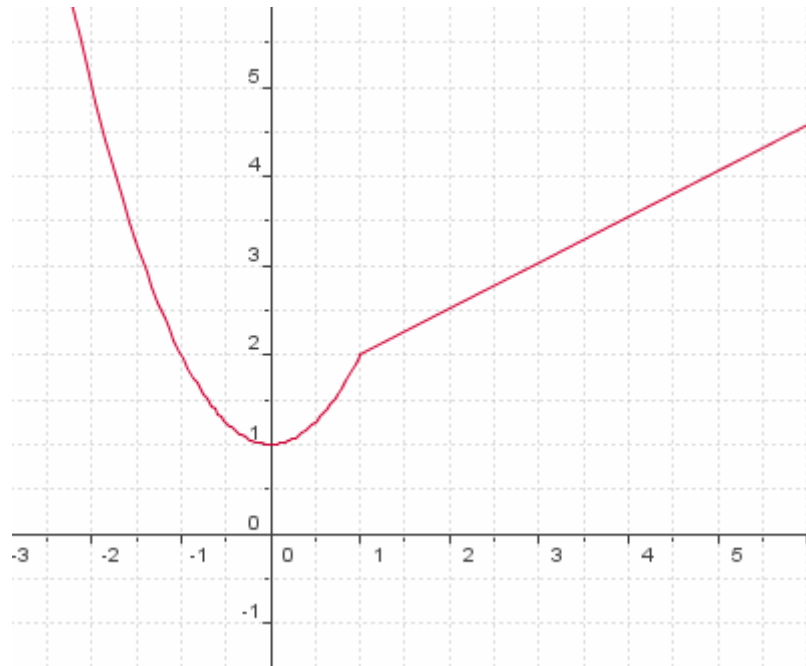
لتكن  $f$  دالة عددية و  $C_f$  منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

تكون  $f$  دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأرتاب محور تماثل للمنحنى  $C_f$

1-  $f$  دالة زوجية أتمم المنحنى  $C_f$



2-  $f$  دالة عددية منحناها كما يلي



هل  $f$  زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $D_f$  حيز تعريفها

نقول ان  $f$  دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$* \text{ لكل } x \text{ من } D_f \quad -x \in D_f$$

$$* \text{ لكل } x \text{ من } D_f \quad f(-x) = -f(x)$$

هل الدالة العددية  $f$  فردية في الحالات التالية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (a)$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -2x - 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad /a$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$-x \in \mathbb{R}^* \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لدينا لكل}$$

$$x \in \mathbb{R}^* \quad \text{لتكن}$$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية

$$f(x) = x^3 + 1 \quad /b$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1) \neq -f(1) \quad \text{ومنه}$$

$f$  دالة غير فردية

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -2x - 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad /c$$

$$D_f = [-2; 0[ \cup [0; 2] = [-2; 2]$$

$$-x \in [-2; 2] \quad \text{و} \quad x \in [-2; 2] \quad \text{لدينا لكل}$$

$$-x \in [-2; 0[ \quad \text{فان} \quad x \in ]0; 2] \quad \text{إذا كان}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{ومنه} \quad f(-x) = -2(-x) - 1 = 2x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -2x + 1 \quad \text{و بالتالي}$$

$$-x \in ]0; 2] \quad \text{فان} \quad x \in [-2; 0[ \quad \text{إذا كان}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{ومنه} \quad f(-x) = -2(-x) + 1 = 2x + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -2x - 1 \quad \text{و بالتالي}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{لكن} \quad x \in [-2; 2] \quad \text{إذن}$$

$f$  دالة فردية

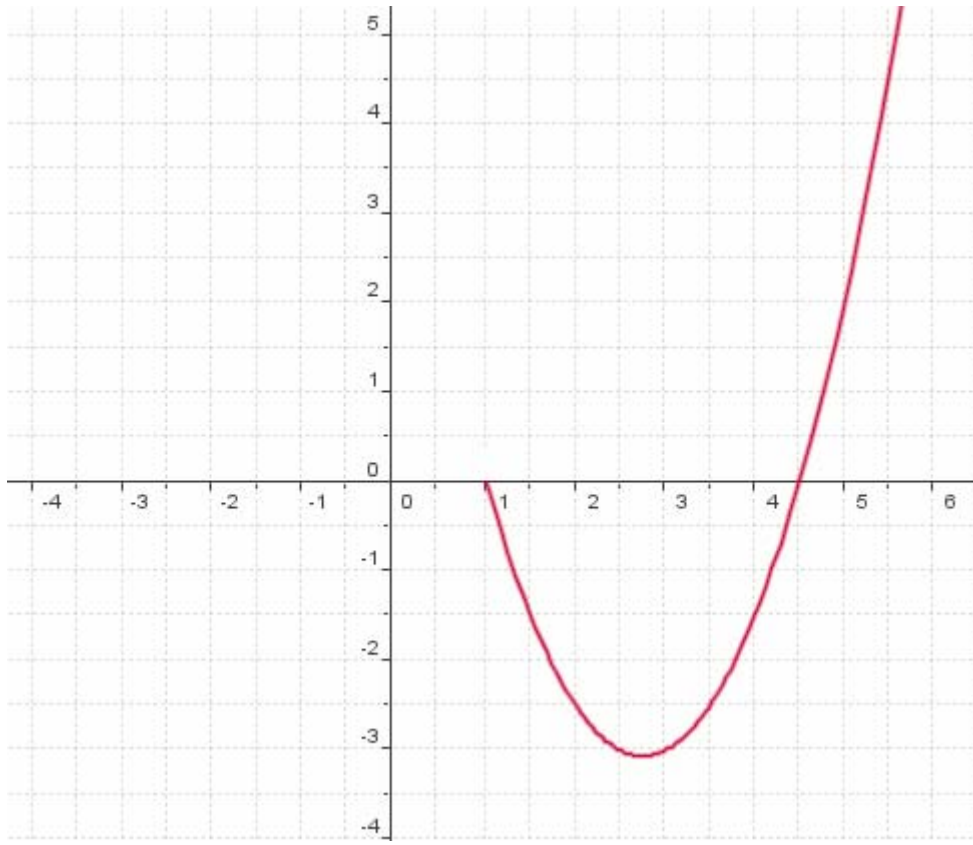
ب- التمثيل المبراني لدالة فردية

خاصة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $C_f$  منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  تكون  $f$  دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى  $C_f$  متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمارين

$f$  دالة فردية أتمم المنحنى  $C_f$



**تمرين**

$$f(x) = \frac{|x| + x^2}{x}$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  حيث

حدد  $D_f$  وبين أن  $f$  فردية ثم أنشئ  $C_f$

**ملاحظة** يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

**III- تغيرات دالة**

**1- منحنى تغيرات دالة**

**تعريف**

- لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $I$  مجال ضمن  $D_f$
- تكون  $f$  تزايدية على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$  إذا كان  $x_1 < x_2$  فان  $f(x_1) \leq f(x_2)$
  - تكون  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$  إذا كان  $x_1 < x_2$  فان  $f(x_1) < f(x_2)$
  - تكون  $f$  تناقصية على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$  إذا كان  $x_1 < x_2$  فان  $f(x_1) \geq f(x_2)$
  - تكون  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$  إذا كان  $x_1 < x_2$  فان  $f(x_1) > f(x_2)$

**مثال**

أدرس تغيرات الدالة  $f$  حيث  $f(x) = -2x + 1$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $a < b$

ومنه  $-2a > -2b$  و بالتالي  $-2a + 1 > -2b + 1$   $f(a) > f(b)$

إذن  $f$  تناقصية قطعاً

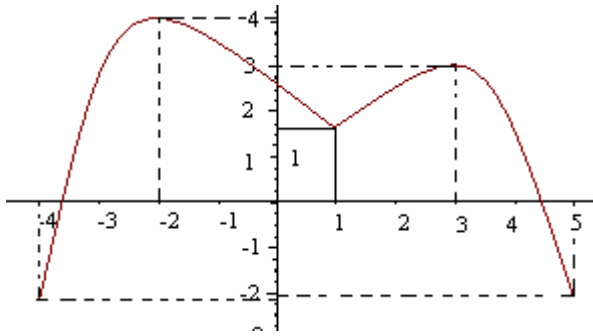
**تمرين**

نعتبر  $f(x) = |x - 2|$

أدرس منحنى تغيرات  $f$  على كل من  $]-\infty; 2]$  و  $[2; +\infty[$

أنشئ  $C_f$

**تمرين** من خلال التمثيل المبياني للدالة  $f$  على المجال  $[-4;5]$  حدد تغيرات  $f$



## 2- الدالة الرتبية

### تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $I$  مجال ضمن  $D_f$   
نقول ان  $f$  رتبية على  $I$  إذا و فقط إذا كان  $f$  إما تزايدية على  $I$  و إما تناقصية على  $I$ .

### ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتبية على مجال  $I$
- دراسة رتابة  $f$  على مجال  $I$  يعني تجزيء  $I$  إلى مجالات تكون فيها  $f$  رتبية، ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

## 3- معدل التغير

### أ- تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $x_1$  و  $x_2$  عنصرين مختلفين من  $D_f$   
العدد  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  يسمى معدل تغير الدالة  $f$  بين  $x_1$  و  $x_2$ .

**مثال** نعتبر  $f(x) = x^2 - 3x$

أحسب معدل تغيرات  $f$  بين 2 و -1

### ب- معدل التغير و الرتابة

بتوظيف التعريف نحصل على

### خاصية

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي و  $I$  مجال ضمن  $D_f$

- تكون  $f$  تزايدية على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  مختلفين من  $I$   
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$
- تكون  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  مختلفين من  $I$   
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$
- تكون  $f$  تناقصية على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  مختلفين من  $I$   
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$
- تكون  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$  إذا و فقط إذا كان لكل  $x_1$  و  $x_2$  مختلفين من  $I$   
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

## تمرين

نعتبر  $f(x) = x^2 - 4x - 1$

أدرس رتابة  $f$  على كل من المجالين  $]-\infty; 2]$  ;  $[2; +\infty[$

و أعط جدول تغيرات  $f$

### الجواب

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a^2 - 4a - 1 - b^2 + 4b + 1}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b) - 4(a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b - 4)}{a - b} = a + b - 4$$

إذا كان  $a$  و  $b$  من  $[2; +\infty[$  فإن  $a > 2$  و  $b > 2$  ومنه  $a + b > 4$  أي  $a + b - 4 > 0$



إذن  $f$  تزايدية قطعاً على  $[2; +\infty[$   
 إذا كان  $a$  و  $b$  من  $]-\infty; 2]$  فإن  $a \leq 2$  و  $b \leq 2$  ومنه  $a + b \leq 4$  أي  $a + b - 4 \leq 0$   
 إذن  $f$  تناقصية على  $]-\infty; 2]$   
 جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f$		$-1$	

**تمرين**

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

نعتبر  
 أدرس رتبة  $f$

**4- الرتبة وزوجية دالة**

**أ- خاصية**

لتكن  $f$  دالة زوجية و  $I$  مجال ضمن  $D_f \cap \mathbb{R}^+$  و  $J$  مجال مماثل  $J$  بالنسبة لـ  $0$  ( $J = \{-x / x \in I\}$ )  
 - إذا كانت  $f$  تزايدية على  $I$  فإن  $f$  تناقصية على  $J$ .  
 - إذا كانت  $f$  تناقصية على  $I$  فإن  $f$  تزايدية على  $J$ .

**البرهان**

لتكن  $f$  دالة زوجية و  $x_1$  و  $x_2$  عنصرين مختلفين من  $J$   
 ومنه يوجد  $x_1'$  و  $x_2'$  من  $I$  حيث  $x_1' = -x_1$  و  $x_2' = -x_2$   

$$\frac{f(x_2') - f(x_1')}{x_2' - x_1'} = \frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{-x_2 + x_1} = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
  
 إذن تغيرات  $f$  على  $I$  عكس تغيرات  $f$  على  $J$

**أ- خاصية**

لتكن  $f$  دالة فردية و  $I$  مجال ضمن  $D_f \cap \mathbb{R}^+$  و  $J$  مجال مماثل  $J$  بالنسبة لـ  $0$  ( $J = \{-x / x \in I\}$ )  
 - إذا كانت  $f$  تزايدية على  $I$  فإن  $f$  تزايدية على  $J$ .  
 - إذا كانت  $f$  تناقصية على  $I$  فإن  $f$  تناقصية على  $J$ .

**ملاحظة**

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على  $D_f \cap \mathbb{R}^+$  ثم استنتاج تغيراتها على  $D_f \cap \mathbb{R}^-$

**تمرين**

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

1- حدد  $D_f$  و أدرس زوجية  $f$   
 2- أدرس تغيرات  $f$  و أعط جدول تغيراتها

**VI- القيمة القصوى - القيمة الدنيا**

**تعريف**

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي  
 - نقول ان  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $a$  إذا وجد مجال  $I$  ضمن  $D_f$  و  $a \in I$  حيث لكل  $x \in I - \{a\}$   

$$f(x) < f(a)$$
  
 - نقول ان  $f$  تقبل قيمة دنيا عند  $a$  إذا وجد مجال  $I$  ضمن  $D_f$  و  $a \in I$  حيث لكل  $x \in I - \{a\}$   

$$f(x) > f(a)$$

**اصطلاح**

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطارييف لدالة  $f$

**تمرين** نعتبر  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- 1- أدرس زوجية  $f$  أحسب  $f(1)$
- 2- بين أن لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$   $f(x) \geq 2$
- 3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ  $f$  إذا وجد

**الجواب**

1- ندرس زوجية  $f$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

لكل  $x \in \mathbb{R}$   $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

إذن  $f$  فردية

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \text{ حساب}$$

2- نبين أن لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$   $f(x) \geq 2$

ليكن  $x$  من  $]0; +\infty[$

$$f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن  $x > 0$  و  $(x-1)^2 \geq 0$  فإن  $f(x) \geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ  $f$

من  $1/2$  و  $1$  نستنتج أن لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$   $f(x) \geq f(1)$

اذن  $f$  تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن  $x \in ]-\infty; 0[$  و منه  $-x \in ]0; +\infty[$  مما سبث نستنتج أن  $f(-x) \geq f(1)$

و حيث  $f$  فردية فإن  $f(x) \geq f(1)$  و بالتالي  $f(x) \leq -f(1)$  أي  $f(x) \leq f(-1)$

اذن  $f$  تقبل قيمة قصوى عند -1

**خاصة**

ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية حيث  $a < b < c$  و  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت  $f$  تزايدية على  $[a; b]$  و تناقصية على  $[b; c]$  فإن  $f$

تقبل قيمة قصوى عند  $b$

إذا كانت  $f$  تناقصية على  $[a; b]$  و تزايدية على  $[b; c]$  فإن  $f$

تقبل قيمة دنيا عند  $b$

**V - دراسة تغيرات دالة - دراسة وضعية منحنين**

دراسة تغيرات دالة  $f$  يعني

- تحديد  $D_f$

- دراسة رتبة  $f$  وتلخيصها في جدول التغيرات

دراسة وضع منحنين مبياناً

ليكن  $C_f$  و  $C_g$  منحنين للدالتين  $f$  و  $g$  على التوالي

يكون  $f(x) > g(x)$  على المجال  $I$  اذا و فقط كان  $C_f$  فوق  $C_g$  في المجال  $I$

يكون  $f(x) < g(x)$  على المجال  $I$  اذا و فقط كان  $C_f$  تحت  $C_g$  في المجال  $I$

حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$  على المجال  $I$  هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنين  $C_f$  تحت  $C_g$  في المجال  $I$

**تمرين**

أدرس تغيرات  $f$  حيث  $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$

**تمرين**

أدرس تغيرات  $f$  حيث  $f(x) = x^3 - 3x$   
حدد مطارييف الدالة  $f$

**تمارين و حلول**

**تمرين 1**

نعتبر  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ:  $f(x) = x|x| - 4x$

1 - أدرس زوجية الدالة  $f$

2 - أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4$$

ب) حدد رتبة  $f$  على كل من  $[0; 2[$  و  $]2; +\infty[$  واستنتج رتبة  $f$  على كل من  $]2; 0[$  و  $]-\infty; -2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة  $f$

3- حدد مطارييف الدالة  $f$  إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = -2x$

$$f(x) = x|x| - 4x$$

1 - ندرس زوجية الدالة  $f$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ لدينا}$$

لكل  $x$  من  $\mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x|-x| + 4x = -(x|x| - 4x) = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4 \quad : [0; +\infty[ \text{ من } x \text{ و } y \text{ مختلفين} \quad \text{2 - أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين } x \text{ و } y \text{ من } [0; +\infty[$$

$$f(x) = x^2 - 4x : [0; +\infty[ \text{ لدينا لكل } x$$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x^2 - 4x - y^2 + 4y}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y) - 4(x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y - 4)}{x - y} \\ &= x + y - 4 \end{aligned}$$

ب) نحدد رتبة  $f$  على كل من  $[0; 2[$  و  $]2; +\infty[$  و نستنتج رتبة  $f$  على كل من  $]2; 0[$  و  $]-\infty; -2[$

\* ليكن  $x$  و  $y$  من  $[0; 2[$  حيث  $x \neq y$  ومنه  $0 \leq x < 2$  و  $0 \leq y < 2$

و بالتالي  $0 \leq x + y < 4$  أي  $-4 \leq x + y - 4 < 0$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \text{ ومنه}$$

إذن  $f$  تناقصية قطعاً على  $[0; 2[$  و حيث أن  $f$  فردية فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $]-2; 0]$   
 \* ليكن  $x$  و  $y$  من  $]2; +\infty[$  حيث  $x \neq y$  ومنه  $x > 2$  و  $y > 2$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \text{ وبالتالي } x+y-4 > 0 \text{ أي}$$

إذن  $f$  تزايدية قطعاً على  $]2; +\infty[$  ومنه  $f$  تزايدية قطعاً على  $]-\infty; -2[$   
 (ج) جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f$		4	-4	

3- نحدد مطاريق الدالة  $f$

بما أن  $f$  تزايدية على كل من  $]2; +\infty[$  و  $]-\infty; -2[$  و تناقصية على  $[-2; 2]$  فإن  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $-2$  هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = -2x$

تحديد تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  يرجع إلى حل المعادلة  $x|x| - 4x = -2x$

$$x|x| - 2x = 0 \text{ تكافئ } x|x| - 4x = -2x$$

$$x(|x| - 2) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$|x| = 2 \text{ أو } x = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \text{ أو } x = 0 \text{ تكافئ}$$

إذن المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  يتقاطعان في النقط ذات الأفاصل 0 و 2 و -2

**تمرين 2**

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1} \text{ نعتبر } f \text{ دالة عددية معرفة بـ}$$

1- حدد  $D_f$  و بين أن  $f$  دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين  $a$  و  $b$  من  $D_f$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات  $f$  على  $[0; 1[$  و  $]1; +\infty[$  و استنتج منحنى تغيراتها على  $]-1; 0]$  و  $]-\infty; -1[$

4- أعط جدول تغيرات  $f$

**الحل**

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$$

1- نحدد  $D_f$

\*- ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \text{ يكافئ } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1 \text{ تكافئ}$$

$$x \neq -1 \text{ و } x \neq 1 \text{ تكافئ}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ إذن}$$

\*- نبين أن  $f$  دالة فردية

لكل  $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$  :  $-x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

لتكن  $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

إذن  $f$  دالة فردية

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \quad \text{نبين أن لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } D_f$$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R} - \{-1;1\}$  حيث  $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{-a}{a^2 - 1} - \frac{-b}{b^2 - 1}}{a - b} = \frac{-a(b^2 - 1) + b(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \times \frac{1}{a - b}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-ab^2 + a + ba^2 - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab(a - b) + a - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a - b)(ab + 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

3- نحدد منحنى تغيرات  $f$  على  $[0;1[$  و  $]1;+\infty[$  ونستنتج منحنى تغيراتها على  $]0;1[$  و  $]1;+\infty[$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \quad \text{لدينا لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{R} - \{-1;1\}$$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $[0;1[$

ومنه  $0 \leq a < 1$  ;  $0 \leq b < 1$  وبالتالي  $0 \leq a^2 < 1$  et  $0 \leq b^2 < 1$  et  $0 \leq ab < 1$

ومنه  $1 \leq ab + 1 < 2$  et  $-1 \leq a^2 - 1 < 0$  et  $-1 \leq b^2 - 1 < 0$

$$\text{إذن } \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0 \quad \text{ومنه } f \text{ تزايدية على } [0;1[$$

و حيث أن  $f$  فردية فإن  $f$  تزايدية على  $]1;+\infty[$

ليكن  $a$  و  $b$  من  $]1;+\infty[$

ومنه  $a > 1$  ;  $b > 1$  وبالتالي  $a^2 > 1$  et  $b^2 > 1$  et  $ab > 1$

ومنه  $ab + 1 > 2$  et  $a^2 - 1 > 0$  et  $b^2 - 1 > 0$

$$\text{إذن } \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0 \quad \text{ومنه } f \text{ تزايدية على } ]1;+\infty[$$

و حيث أن  $f$  فردية فإن  $f$  تزايدية على  $]0;1[$

4- جدول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$	